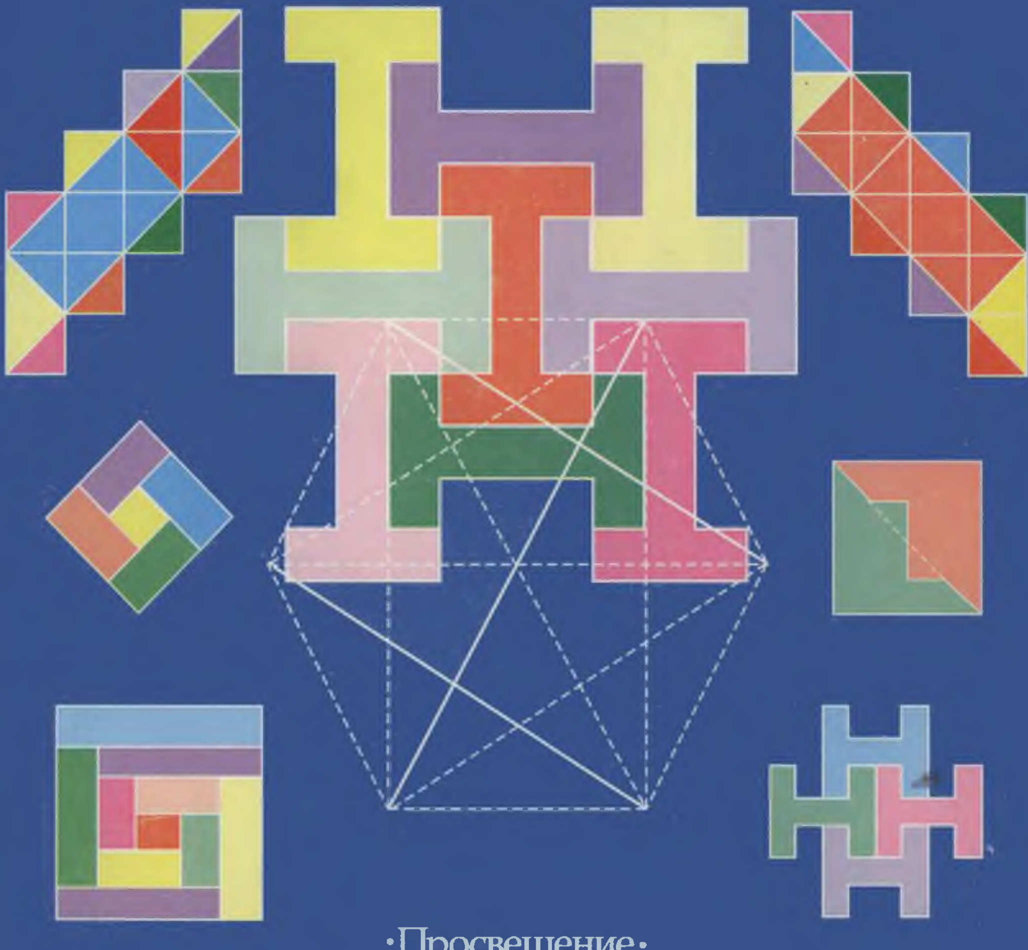
А. В. СПИВАК

ТЫСЯЧА И ОДНА ЗАДАЧА ПО МАТЕМАТИКЕ

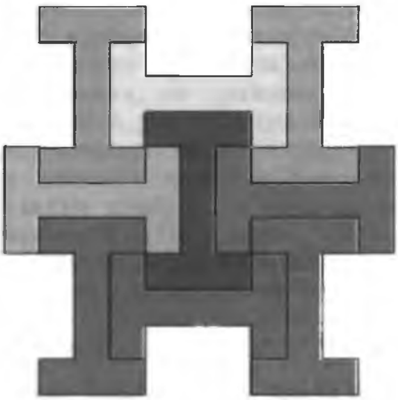


·Просвещение·

А. В. СПИВАК

ТЫСЯЧА И ОДНА ЗАДАЧА ПО МАТЕМАТИКЕ

Книга для учащихся
5 – 7 классов



Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2002

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое открытие всегда заключается в том, что есть вещи, которые стоит открывать.

Д. Томсон. *«ДУХ НАУКИ»*

Математика — один из главных школьных предметов. Но от многих родителей и учеников можно услышать: «Надо уменьшить нагрузку, в нашей семье гуманитарный склад ума, а математика — и недоступна, и никому не нужна».

Плоха не математика, а бессмысленная зубрежка. Цель обучения математике не заучивание невесть откуда взятых правил, а развитие интеллекта. На уроке все должно быть ясно. Если есть какое-то непонимание — значит, нет никакого понимания. Миф о людях с нематематическим, гуманитарным складом ума придуман в оправдание тем, кто пропустил какое-то важное место (например, не понял, что такое процент или дробь) и все оставшиеся школьные годы так и сидит на уроках, не понимая, что творится.

Нормальный, здоровый ребенок (не вундеркинд) может невероятно много[1]. Всякому хочется радости творчества, самостоятельных размышлений. Эта книжка как раз дает возможность думать. Бо́льшая часть ее задач требует не долгих вычислений, а ясного взгляда, сосредоточенности. (Но учтите — есть и очень трудные задачи. Иной раз потребуются длительные напряженные размышления для того, чтобы найти решение «в одну строчку».)

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ?

Книги, трактующие об искусстве рассуждать, полезны лишь тем, кто может обойтись без них.

Д'Аламбер

В решении любой задачи есть крупица открытия. Задача может быть сколь угодно скромной, но если она заставила быть изобретательным и если вы решили ее самостоятельно, то радость победы — пусть даже о ней никто, кроме вас, не узнает — должна быть ОГРОМНОЙ. Вспомните выскочившего из ванны Архимеда!

---

[1] И быстро теряет изначальную гениальность, если взрослые, ленясь, не ценят и не развивают его ум, не желают или не умеют заставить его учиться.

Если же задача не получилась и пришлось читать чужое решение[1], обязательно возникнет вопрос: «Как можно было до этого догадаться?» Ответ прост — нельзя научиться плавать, не войдя в воду. И, честно говоря, пишу я все это не для того, чтобы дать волшебный ключик[2]. Просто какие-то задачи могли не получиться и могла возникнуть идея: «Не бросить ли эту противную книгу и не взять ли что-нибудь попроще? А может быть, я — самый глупый человек в мире, и именно я никогда не смогу научиться их решать?»

Нет, учиться надо не тому, что легко получается. Ценно высшее напряжение сил. Урок математики должен быть чем-то вроде операции на мозге, создающей новые извилины. Может быть, вас утешат и придадут силы мысли мудрецов?

- ✓ Способность к восприятию математики распространена в человечестве, пожалуй, даже в бо́льшей степени, чем способность получать удовольствие от приятной мелодии, она присуща огромному большинству (*Г. Харди*).
- ✓ Умение решать задачи — такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения (*Д. Пойа*).
- ✓ ... если подробности целой тысячи дел Вы знаете как свои пять пальцев, странно было бы не разгадать тысячу первое (*Шерлок Холмс*).
- ✓ Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было прийти к ним самостоятельно (*А. Н. Колмогоров*).

Номера задач выделены, если к ним в конце книги даны решения, указания или ответы. Некоторые задачи имеют один и тот же номер (например, задачи 23 и 23). Так сделано, когда по сути это — варианты одной и той же задачи.

Вряд ли необходимо решать абсолютно все задачи подряд, напротив, некоторые трудные задачи лучше пропустить, чтобы размышлять над ними на досуге и вернуться к ним спустя несколько недель или месяцев. Звездочкой помечены задачи, которые кажутся мне более трудными. (Впрочем, у каждого человека свои понятия о том, что трудно, а что легко.)

---

[1] Без этого не обойтись. Математика развивается уже несколько тысячелетий — даже если вы столь же талантливы и упорны, как великие предшественники, жизнь слишком коротка. Спасает нас только то, что, как сказал великий математик и физик Исаак Ньютон, мы стоим на плечах гигантов, можем использовать их достижения.

[2] И нет никакого волшебного ключика, никаких сверхъестественных математических способностей, никаких сверхбыстрых методик, позволяющих без труда овладеть наукой!

АРИФМЕТИКА И НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

> Да, что знаешь в детстве —
> знаешь на всю жизнь, но и:
> чего не знаешь в детстве —
> не знаешь на всю жизнь.
>
> М. Цветаева

1. «МЕТОД ПРОКРУСТА»

Отрезать лишнее или добавить недостающее — вот прием, полезный для решения следующих задач.

1. На двух полках 25 книг (рис. 1). На одной из них на 3 книги больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?

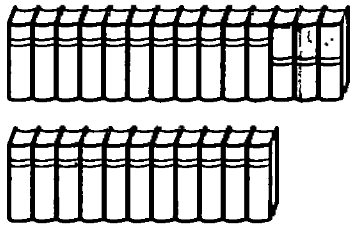


Рис. 1

2. Сумма двух чисел равна 1106. Одно из них больше другого на 22. Найдите эти числа.

3. Два карандаша и ластик стоят столько же, сколько один карандаш и четыре ластика. Во сколько раз карандаш дороже ластика?

4. У Маши, Саши и Даши вместе 11 воздушных шариков. У Маши на 2 шарика меньше, чем у Даши, а у Саши на 1 шарик больше, чем у Даши. Сколько шариков у Даши?

5. Сумма пяти последовательных целых чисел равна 875. Найдите эти числа.

---

6. Разрежьте каждую из фигур (рис. 2) пополам (т. е. на две одинаковые и по площади, и по форме части).

7. Разрежьте каждую из фигур (рис. 3) на три равные части. (Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равны не только по площади, но и по форме.)

8. Сестер у Вити на две больше, чем братьев. На сколько в этой семье девочек больше, чем мальчиков?

9. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

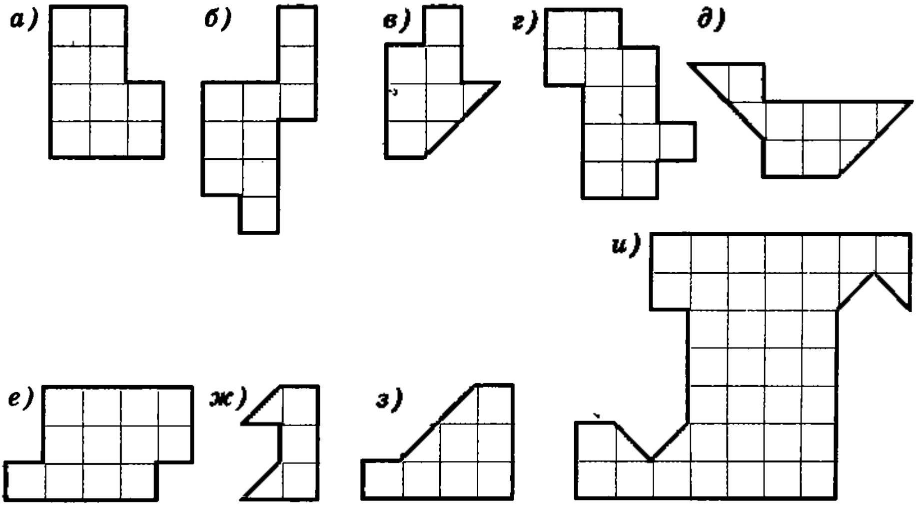


Рис. 2

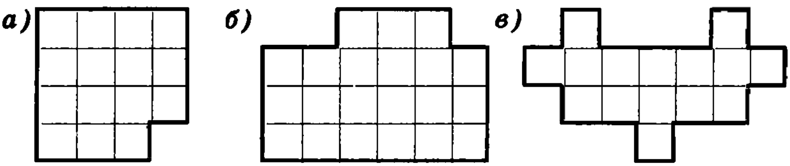


Рис. 3

2. ПЕРЕПРАВЫ

Обычный метод преодоления трудности состоит в том, чтобы обойти ее.

10. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Смогли ли солдаты переправиться через реку?

11. Может ли крестьянин перевезти через реку волка, козу и капусту, если в лодку вместе с ним помещается только или волк, или коза, или капуста? (Нельзя оставить без присмотра ни волка с козой, ни козу с капустой.)

12. По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — еще три парохода (рис. 4). Канал такой узкий, что два парохода в нем разъехаться не могут, но в нем есть залив, где может поместиться один пароход. Могут ли они разъехаться?

Рис. 4

13. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 мин, мама — за 2 мин, малыш — за 5 мин, а бабушка — за 10 мин. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 мин? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Перебрасывать фонарик через реку нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

14. Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

* **15.** Могут ли рыцари, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

УКАЗАНИЕ. Чтобы не запутаться, обозначьте рыцарей буквами A, B, C, а оруженосцев соответственно a, b, c. Проведите черточки, которые будут обозначать реку (рис. 5). Затем выпишите все передвижения лодки, каждый раз отмечая, кто на каком берегу и где находится лодка. (На рисунке — одно из решений задачи. Часть строк, чтобы не было скучно, пропущена.)

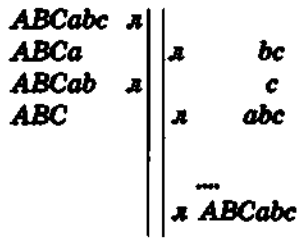


Рис. 5

* **16.** В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера[1] и три каннибала[2]. Миссионеры боятся остаться в меньшинстве. Только один миссионер и один каннибал умеют грести. Помогите им переправиться.

3. СБЕЖАЛИ ЦИФРЫ

В этой сказке нет порядка:
Что ни слово — то загадка!

Б. Заходер

17. Восстановите поврежденные записи арифметических действий:

а) $\begin{array}{r} 5* \\ + *84 \\ \hline ***0 \end{array}$; б) $\begin{array}{r} ** \\ + * \\ \hline **8 \end{array}$; в) $\begin{array}{r} ** \\ + ** \\ \hline *98 \end{array}$; г) $\begin{array}{r} 6*5* \\ - *8*4 \\ \hline 2856 \end{array}$; д) $\begin{array}{r} 3*86 \\ + *2*7 \\ \hline 804* \end{array}$;

---

[1] Слово «миссионер» произошло от французского missionnaire, возможно, при посредстве немецкого Missionär; означает «проповедник», «посланец».

[2] Каннибал — людоед.

```
е)    **      ж)    126     з)   27      и)   2*      к)   4*
   ×  52         ×   **        × **         × *2         × *6
     ----         -----         ----         ----         ----
      *6            ***          **8           *8          2*2
   + **         + ****        + **         + 7*         + 2*5
     ----         -----         ----         ----         ----
     *7*;         1*2*6;        3**;         7*8;         ***2;
```

```
л)    **      м)   ***     н)    ***      о)   6*      п)   ***
   ×  8*         ×  *8        ×  *3*        × ***         ×  ***
     ----         -----        ------        ----        -------
      ***          ***           3**           **          *6**
   + **         + ****        + **3*       + **         + **66
     ----         -----         3**3         **           6*6
     ****;        ****0;       ------       ----        -------
                               ******;      ***6;        *****.
```

18. Витя выложил из карточек пример на сложение и затем поменял местами две карточки (рис. 6). Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

19. Какое число в 7 раз больше своей последней цифры?

20. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получим второе число. Найдите эти числа.

```
  314159
+ 291828
  ------
  585787
```

Рис. 6

21. Расшифруйте «животноводческий» ребус: Б+ВЕЕЕ=МУУУ.

---

22. Разделите каждую из фигур (рис. 7) по линиям сетки на четыре одинаковые части, чтобы в каждой части был ровно один кружок.

23. В корзине 20 грибов: белые, подосиновики и подберезовики. Сколько в корзине белых грибов, если подберезовиков в ней в 9 раз больше, чем подосиновиков?

23. В коробке лежат 14 шаров — белых, красных и черных, причем белых в 7 раз больше, чем красных. Сколько в коробке черных шаров?

24. По контракту Гансу причиталось по 48 тугриков за каждый отработанный день, а за каждый прогул с него взыскивалось 12 тугриков. Через 30 дней Ганс узнал, что ему ничего не причитается и он ничего не должен. Сколько дней он работал?

25. Весы пришли в равновесие, когда на одну чашу поставили гири по 2 кг, а на другую — по 5 кг, всего 14 гирь. Сколько двухкилограммовых гирь поставили на весы?

25. Картофель расфасован в 24 пакета, по 5 кг и по 3 кг. Общая масса пятикилограммовых пакетов равна массе трехкилограммовых пакетов. Сколько пятикилограммовых пакетов?

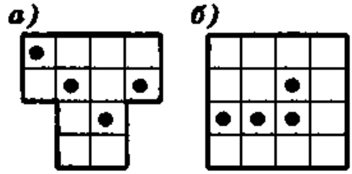


Рис. 7

Рис. 8

26. Хозяин обещал работнику за 30 дней 9 р. и кафтан. Через три дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан?

27. В двух пачках всего 30 тетрадей. Когда из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, в первой стало вдвое меньше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

28. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое (рис. 8). На сколько стирок хватит оставшегося куска?

4. НЕХВАТКИ И ИЗБЫТКИ

29. Тане не хватает 2 р. для покупки 8 воздушных шариков. Если она купит 5 шариков, то у нее останется 10 р. Сколько стоит шарик?

30. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 р. А на 15 тетрадей у него не хватило 7 р. Сколько денег было у школьника?

30. Если я захочу купить 4 карандаша, то мне не хватит 8 р., а если я куплю 8 карандаша, то у меня останется 6 р. Сколько у меня денег?

31. Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?

5. ЧЕМ ОТЛИЧАЕТСЯ ОВЦА ОТ КУРИЦЫ?

32. У овец и кур вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец?

РЕШЕНИЕ. Если все 36 животных — куры, то ног $2\cdot 36=72$. Чем отличается овца от курицы? У овцы на 2 ноги больше! Значит, заменяя курицу на овцу, мы увеличиваем число ног на две и таких замен надо произвести $(100-72):2=14$. Ответ: 14 овец.

33. Вовочка собрал в коробку жуков и пауков — всего 8 штук. Если всего в коробке 54 ноги, сколько там пауков? (У жука 6 ног, у паука 8.)

33. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 6x+8y=54. \end{cases}$$

34. На поляне ребята пасут жеребят. Если пересчитать ноги ребят и жеребят, то будет 74, а если считать головы, то — 22. Сколько на лугу жеребят?

* **35.** Один человек купил 112 баранов, старых и молодых, заплатив за них 49 рублей и 20 алтын. За каждого старого барана он платил 15 алтын и 4 полушки, а за молодого — 10 алтын. Сколько каких баранов было куплено? (В одном алтыне 3 копейки, а в одной копейке 4 полушки.)

6. ШУТКИ

Не любо — не слушай, а врать не мешай.

36. Один господин написал о себе: «Пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на ногах десять». Что он забыл?

37. В корзине лежат 5 яблок. Разделите их между пятью лицами, чтобы каждый получил по яблоку и одно яблоко осталось бы в корзине.

38. Экипаж, запряженный тройкой лошадей, проехал за час 15 км. С какой скоростью бежала каждая лошадь?

39. Двое играли в шахматы четыре часа. Сколько времени играл каждый?

40. В семье пять братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье?

41. Два отца и два сына съели за завтраком три яйца, причем каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?

42. Сколько в доме животных, если все они, кроме двух, собаки, все, кроме двух, кошки и все, кроме двух, попугаи?

43. В двух кошельках лежат две монеты, причем в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Может ли так быть?

44. Подряд стоят 6 стаканов: 3 с водой и 3 пустых (рис. 9). Дотронувшись рукой лишь до одного стакана, добейтесь, чтобы пустые и полные стаканы чередовались.

45. Почему в поездах все стоп-краны всегда красные, а в самолетах — голубые?

46. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой — черными. Остап надеется или свести вничью обе партии, или одну выиграть. Как он собирается играть?

47. Представьте себе корабль со спущенной на воду веревочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается воды. Начинается прилив, который поднимает воду каждый час на 20 см. Через какое время покроется водой третья снизу ступенька лестницы?

48. Угадайте закономерность форм фигурок на рисунке 10. Какую фигурку надо поставить следующей? А после нее?

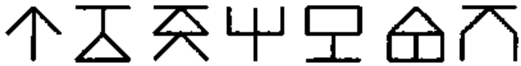


Рис. 9 Рис. 10

49. Король пожелал сместить своего министра, не слишком обидев его. Он подозвал министра к себе и предложил выбрать один из двух листочков, пояснив, что на одном написано «Уходите», а на другом — «Останьтесь». Листок, который вытащит министр, решит его судьбу. Министр догадался, что на обоих листках написано «Уходите». Помогите министру сохранить свое место.

50. Из Москвы в Петербург помчал на «Volvo» предприниматель Вася. Навстречу на велосипеде выехал доцент Иван Петрович. Кто из них в момент встречи был ближе к Москве?

* **51.** Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли так быть?

ПОДСКАЗКА. Сын отца – это брат. А вот кто отец сына?..

---

52. а) Разрежьте невыпуклый[1] четырехугольник (рис. 11, *а*) на 6 частей двумя прямыми.
б) Сделайте то же самое с подковой (рис. 11, *б*).

53. На какое наибольшее число частей можно разделить тремя прямыми разрезами: а) блин; б) булку?

54. Здесь зашифровано известное стихотворение. Расшифруйте его!

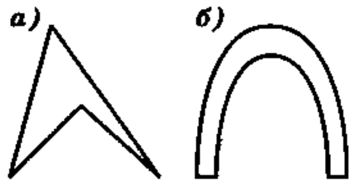


Рис. 11

Мяжя Дяма клёнгё брящэд,
юлёмыря ф лэщгю нащыг.

Дыжэ, Дямэщгя, мэ брящъ,
мэ юдёмэд ф лэщгэ нащ.

7. СКОЛЬКО НАДО ВЗЯТЬ?

Даже если объяснение настолько ясно, что исключает всякое ложное толкование, все равно найдется человек, который все перепутает.

55. В коробке лежат 10 красных и 10 синих воздушных шариков. Продавец, не глядя, достает по одному шарику. Сколько шариков надо вытащить, чтобы среди вынутых из коробки шариков обязательно нашлись два шарика одного цвета?

[1] Фигуру называют выпуклой, если всякий отрезок, соединяющий ее точки, целиком принадлежит ей. Выпуклый четырехугольник лежит от любой своей стороны по одну сторону, а невыпуклый этим свойством не обладает.

56. Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с семью красными и пятью синими карандашами, чтобы было взято не меньше двух красных и не меньше трех синих?

57. Сколько карандашей можно взять в темноте из коробки, в которой лежат 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 желтых карандаша, чтобы в коробке заведомо осталось: а) не меньше 6 синих карандашей; б) хотя бы по одному карандашу каждого цвета?

58. В ящике 28 красных, 20 зеленых, 12 желтых, 20 синих, 10 белых и 10 черных шариков. Сколько шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытащенных шариков обязательно оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

59. В темной кладовой в беспорядке лежат ботинки: 10 пар черных и 10 пар коричневых. Сколько ботинок надо взять, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета? (В темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого.)

60. В гости пришли 6 человек в галошах разного размера. Расходились по одному, и некоторые надевали галоши большего размера. Сколько могло остаться гостей, не сумевших надеть галоши? А если гостей не 6, а 17?

61. Винни Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа вместе съели 70 бананов, причем каждому сколько-то досталось. Винни Пух съел больше каждого из остальных, а Кролик и Пятачок вместе съели 45 бананов. Сколько бананов досталось ослику?

62. В погребе 8 банок клубничного варенья, 7 малинового и 5 вишневого. Сколько банок можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там останутся еще хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

8. ПЕРЕКЛАДЫВАНИЯ СПИЧЕК

> Чтобы решить задачу, смотрите на нее,
> пока решение не придет в голову.

63. Уберите указанное слева число спичек (рис. 12), чтобы осталось указанное справа число квадратов со стороной в одну спичку[1].

64. Переложите указанное слева число спичек (рис. 13), чтобы получилось указанное справа число квадратов[1].

65. На рисунке 14 шесть спичек образуют четыре треугольника. Можно ли из шести спичек составить четыре равносторонних треугольника со стороной, равной длине спички?

УКАЗАНИЕ. Разрешено использовать клей или пластилин.

[1] Никаких лишних спичек не должно быть!

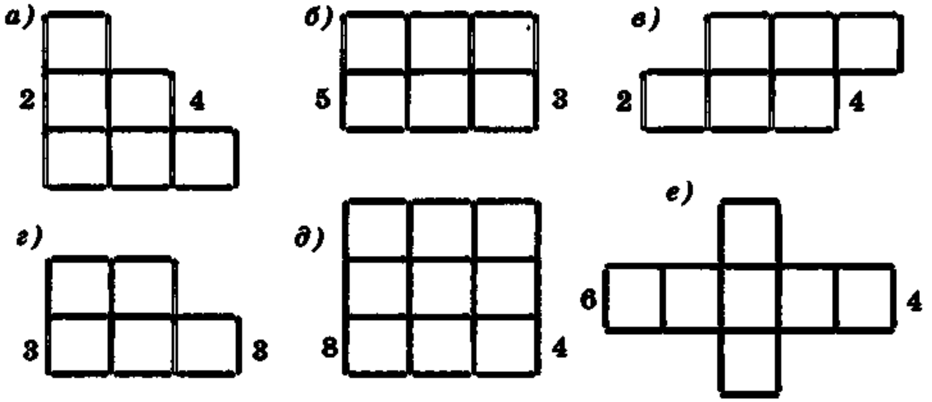


Рис. 12

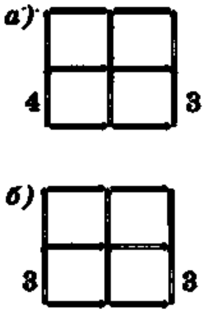


Рис. 13

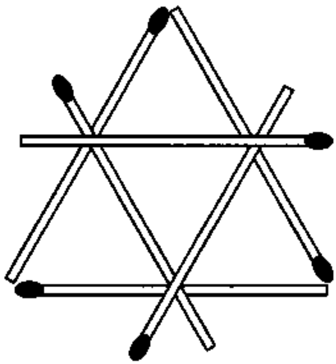


Рис. 14

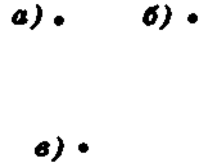


Рис. 15

66. а) Девочка заменила каждую букву своего имени ее номером в русском алфавите и получила число 2011533. Как ее зовут?
б) Число 222122111121 получается, если в некотором слове заменить буквы на их номера в алфавите. Какое это слово?

67. а) Закрасьте несколько клеток квадрата размером 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная — с одной закрашенной.
б) Расставьте в клетках квадрата 4×4 знаки «+» и «−» так, чтобы для любой клетки ровно в одной соседней с ней по стороне был противоположный знак.

68. Не отрывая карандаш от бумаги, проведите через:
а) вершины квадрата (рис. 15,*а*) три отрезка, вернувшись в исходную точку;
б) девять точек, расположенных в виде квадрата (рис. 15,*б*), четыре отрезка (возвращаться в исходную точку не обязательно);
в) шестнадцать точек, расположенных в виде квадрата (рис. 15,*в*), шесть отрезков, вернувшись в исходную точку.

9. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

> **Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.**
>
> **Козьма Прутков**

В несерьезной форме принцип Дирихле[1] гласит: «Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов».

Более общая формулировка: «Если z зайцев сидят в k клетках, то найдется клетка, в которой не менее $\frac{z}{k}$ зайцев». Не надо бояться дробного числа зайцев — если получается, что в ящике не меньше $\frac{7}{3}$ зайцев, значит, их больше двух.

Один математик сказал, что Дирихле по частоте упоминаний школьниками навсегда обеспечено одно из самых высших мест. И добавил: «Пожалуй, есть способ лишить его лидерства — назвать чьим-нибудь именем принцип «никакое четное число не равно никакому нечетному».

Доказательство принципа Дирихле очень простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения от противного часто встречаются. Допустим, что в каждой клетке число зайцев меньше, чем $\frac{z}{k}$. Тогда в k клетках вместе зайцев меньше, чем $k\cdot\frac{z}{k}=z$. Противоречие!

69. **В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.**

70. **В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?**

71. **В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта. Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?**

72. **Найдите значение дроби: а) $\frac{В\cdot А\cdot Р\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\cdot Е}{К\cdot А\cdot Р\cdot Л\cdot С\cdot О\cdot Н}$; б) $\frac{Г\cdot Р\cdot У\cdot З\cdot И\cdot Я}{Т\cdot Б\cdot И\cdot Л\cdot И\cdot С\cdot И}$. (Разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения.)**

73. **Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?**

---

[1] Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859), великий немецкий математик, изучал арифметику (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии), математический анализ (признак сходимости Дирихле, ряды Дирихле), механику и математическую физику (принцип Дирихле в теории гармонических функций). Он, разумеется, и не подозревал, что его именем назовут столь простой и важный принцип.

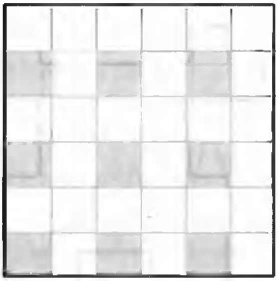
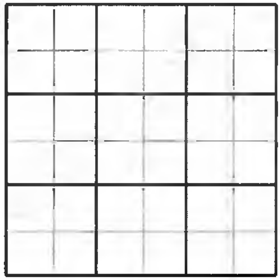
а)  б) 

Рис. 16

РЕШЕНИЕ. Ответ очевиден из рисунка 16,а, на котором никакие две из девяти закрашенных клеток не соприкасаются, а десятую клетку с соблюдением условия не закрасишь. Но как строго доказать, что никаким другим способом нельзя расположить на доске десять несоприкасающихся клеток? Перебором? Вариантов гораздо больше, чем кажется на первый взгляд. И уж совсем невозможно решение методом перебора, если доску 6×6 заменить, например, на доску размером 2000×2000. Оказывается, можно разбить доску на квадраты размером 2×2 (рис. 16,б). Больше одной закрашенной клетки в таком квадрате быть не может!

10. РАЗНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ДВУХ ИЗ $n+1$ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ КРАТНА n

74. Из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна. Докажите это.

РЕШЕНИЕ. Все числа можно разбить на два класса: четные и нечетные. Невозможно распределить три числа по двум классам так, чтобы ни в какой класс не попало более одного числа. Значит, среди любых трех целых чисел найдутся два числа одинаковой четности. Их сумма четна.

75. Среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых кратна 5. Докажите это.

76. Докажите, что из любых $n+1$ целых чисел можно выбрать два числа, разность которых делится на n.

77. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

78. Из любых ли ста целых чисел можно выбрать два числа, сумма которых кратна 7?

---

79. Расставьте числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 в таком порядке, чтобы между единицами оказалась одна цифра, между двойками — две, между тройками — три, а между четверками — четыре цифры.

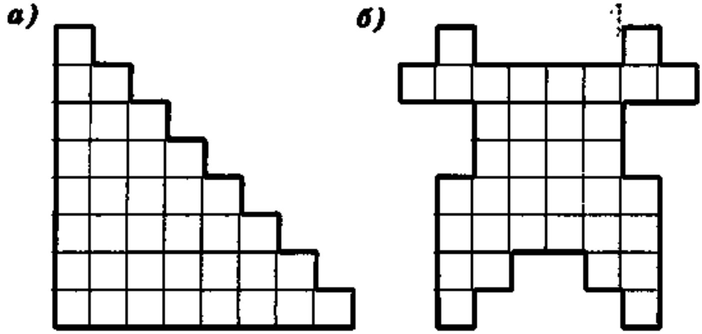


Рис. 17

80. Разрежьте каждую из фигур (рис. 17) на трехклеточные уголки.

11. ВСЯКАЯ ПАЛКА О ДВУХ КОНЦАХ

В высотном здании МГУ есть переход между общежитием и учебной зоной. С 13-го этажа учебной зоны он идет на 19-й (!) этаж общежития. Почему? Прежде чем ответить на этот вопрос, решите следующую задачу.

81. Во сколько раз лестница на 6-й этаж дома длиннее лестницы на 2-й этаж этого же дома (рис. 18)?

Теперь с университетскими лестницами все ясно: в учебной зоне этажи высокие, в полтора раза выше, чем в общежитии. И именно таким образом соотносятся числа 13 − 1 = 12 и 19 − 1 = 18 (рис. 19).

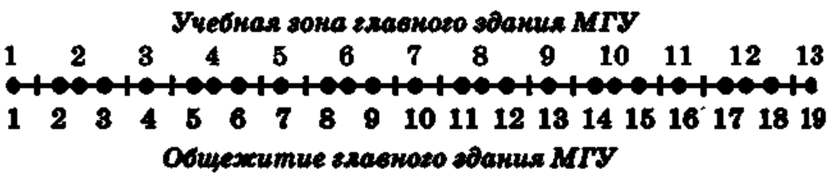
82: От куска сукна в 16 м портной отрезает ежедневно по 2 м. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

82. Каждую минуту от бревна длиной 6 аршин отпиливают 1 аршин. За сколько минут распилят все бревно?

83. Имеется 60 трехметровых бревен, которые надо распилить на полуметровые поленья. Сколько распилов придется сделать? (Пилить несколько бревен одновременно нельзя.)

◀Рис. 18

Рис. 19



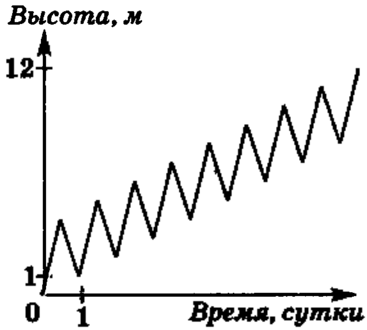


Рис. 20

2	3	2
3		3
2	3	2

Рис. 21

84. Кузнец соединил 5 цепей, по 3 звена каждая, в одну цепь, раскрыв 4 кольца и снова их заковав. Нельзя ли было выполнить работу быстрее?

85. В шесть часов утра в понедельник гусеница начала вползать на дерево высотой в 12 м. За день (до 18 ч) она поднималась на 4 м, а за ночь спускалась на 3 м. Когда она достигнет вершины?

УКАЗАНИЕ. На рисунке 20 изображен график движения гусеницы.

86. Золотошвейка разместила 20 учениц в комнатах своего дома, как показано на рисунке 21. По вечерам она проверяла, чтобы в комнатах на каждой стороне дома было 7 девушек. Однажды в гости к ним приехали 4 подружки.

а) Разместите девушек так, чтобы золотошвейка насчитала вдоль каждой стороны опять по 7 девушек.

б) На следующий день 4 девушки провожали подруг. Разместите 16 оставшихся так, чтобы опять с каждой стороны оказалось по 7 девушек.

12. ДВЕНАДЦАТЬ СТУЛЬЕВ

87. Поставьте 12 стульев в 3 ряда так, чтобы: а) в двух рядах было по 4 стула, а в одном — 6; б) в каждом ряду было по 5 стульев.

88. Разместите вдоль стен квадратной комнаты: а) 10 стульев так, чтобы у каждой стены стояло 3 стула; б) 12 стульев так, чтобы у каждой стены стояло 3 стула.

89. а) Расположите 6 точек на четырех отрезках так, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.

б) Нарисуйте 5 равных по длине отрезков таким образом, чтобы на них можно было расположить 10 точек — на каждом отрезке по 4 точки.

в) Нарисуйте 6 отрезков и отметьте 9 точек, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.

г) Нарисуйте 6 отрезков и отметьте 12 точек, чтобы каждому отрезку принадлежали 4 точки.

90. Поставьте 24 стула в 6 рядов, по 5 стульев в каждом.

13. УСТНЫЙ СЧЕТ

Изучите азы науки, прежде чем взойти на ее вершины. Никогда не беритесь за последующее, не усвоив предыдущее.

И. П. Павлов

91. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное число?

92. У Акулины и Анфисы денег поровну. Сколько денег должна дать одна из них другой, чтобы у Анфисы стало на 10 р. больше, чем у Акулины?

93. Два пакета молока и пачка творога стоят 38 р. А две пачки творога и пакет молока стоят 34 р. Что дороже и на сколько: пачка творога или пакет молока?

94. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица вдвое дороже маленькой. Купили 5 больших птиц и 3 маленьких. Если бы вместо этого купили 3 больших птицы и 2 маленьких, то потратили бы на 20 р. меньше. Сколько стоит большая птица?

95. Сколько дедушке лет, столько месяцев внучке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке?

96. Деду, отцу и сыну вместе 100 лет. Отцу и сыну вместе 45 лет. Сын на 25 лет моложе отца. Сколько кому лет?

97. Если к моим деньгам добавить половину их, да еще 10 р., то у меня станет 100 р. Сколько у меня денег?

98. Деду 64 года, а внуку 16 лет. Через сколько лет дед станет втрое старше внука?

98. Решите уравнение $64+x=3(16+x)$.

99. Брат втрое богаче меня, отец втрое богаче брата, дед втрое богаче отца, а у нас вместе 1000 рублей. Сколько у меня денег?

100. Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 200 р. Сколько стоит корова?

101. Сын вдвое моложе отца. Родился он, когда отцу было 24 года. Сколько лет сыну?

101. Сын втрое моложе отца. Когда отцу было 37 лет, сыну было 3 года. Сколько лет отцу?

---

102. На двух руках 10 пальцев. А на 10 руках?

103. Три курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней?

104. Пять рыбаков съели 5 судаков за 5 дней. За сколько дней 10 рыбаков съедят 10 судаков?

105. Три землекопа за 2 ч вырыли 3 ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 ч?

106. Шесть косцов выпили бочонок кваса за 8 ч. Сколько косцов за 3 ч выпьют такой же бочонок?

14. РАЗРЕЗАНИЯ

107. Разрежьте каждую из фигур (рис. 22) на 4 равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)

108. Разрежьте квадрат на два равных: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) семиугольника.

109. Разрежьте квадрат на три (не обязательно равных) шестиугольника.

110. Из прямоугольника 13×7 вырежьте 15 прямоугольников размером 2×3.

111. Разрежьте фигуру (рис. 23, *а*) на буквы «Т» (рис. 23, *б*).

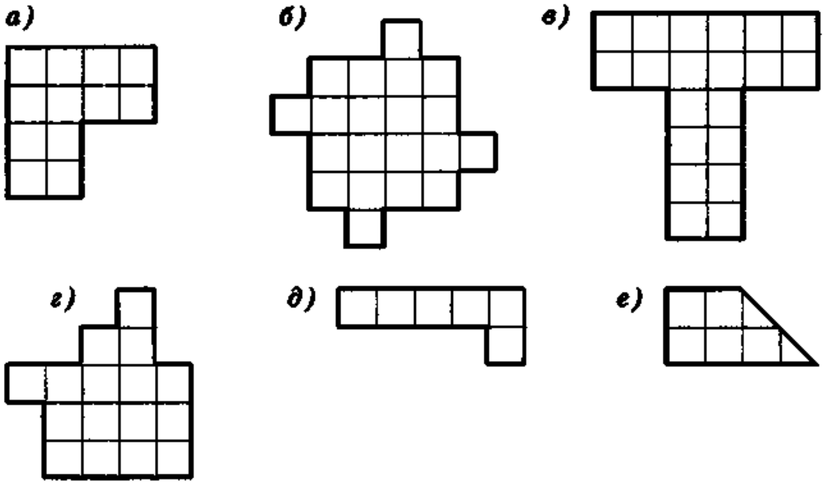


Рис. 22

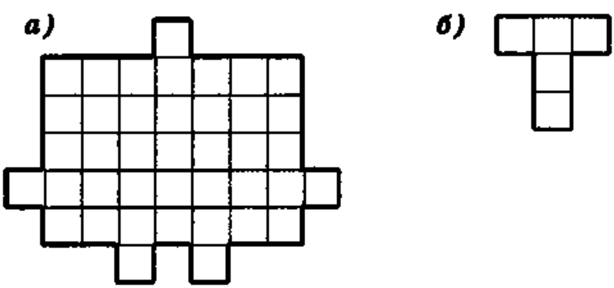


Рис. 23

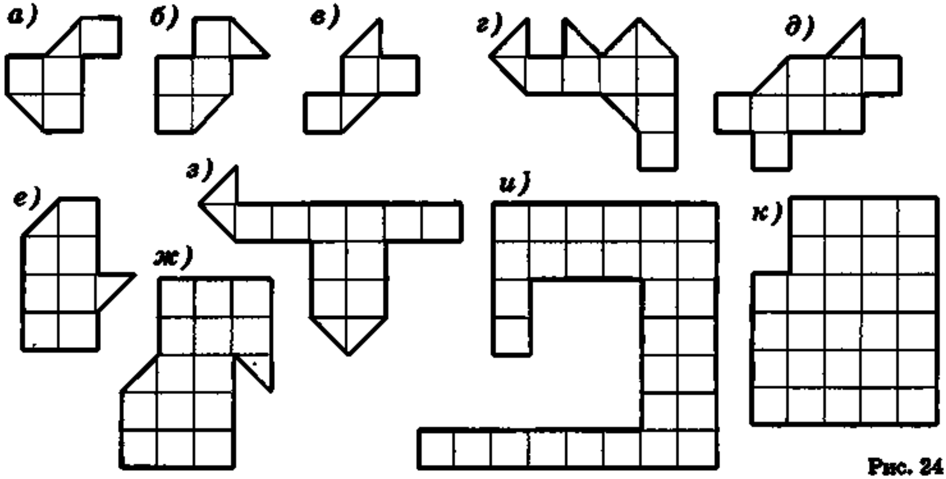


Рис. 24

112. Разрежьте каждую из фигур (рис. 24) пополам (т. е. на две одинаковые части).

113. а) Разрежьте прямоугольник 5×8 на фигурки, изображенные на рисунке 25, *а*.

б) Разрежьте прямоугольник 7×15 на фигурки, изображенные на рисунке 25, *б*.

114. Разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат:

а) прямоугольник 10×7, из которого вырезали прямоугольник 1×6 (рис. 26, *а*);

б) прямоугольник 4×9;

в) фигуру, изображенную на рисунке 26, *б*.

УКАЗАНИЕ. В пункте «а» сторона квадрата будет равна 8, а в пунктах «б» и «в» 6.

115. Разрежьте фигуру (рис. 27) на: а) четыре равные части; б) пять одинаковых частей. (Можно резать не только по сторонам и диагоналям клеток.)

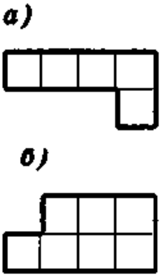


Рис. 25

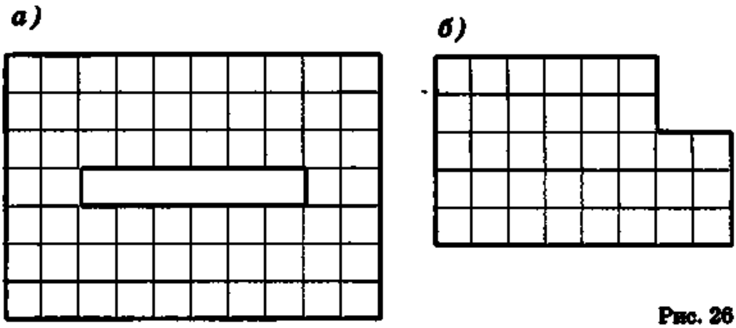


Рис. 26

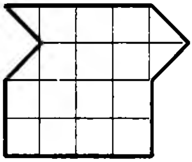


Рис. 27

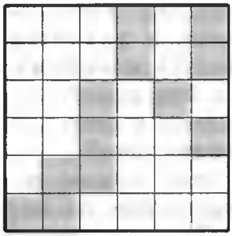


Рис. 28

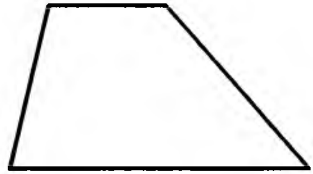


Рис. 29

116. Разрежьте доску (рис. 28) на четыре одинаковые части, чтобы каждая из них содержала три закрашенные клетки.

* **117.** Разрежьте квадрат 7×7 на пять частей и переложите их так, чтобы получилось три квадрата: 2×2, 3×3 и 6×6. (Постарайтесь сделать это несколькими способами.)

---

118. Покажите, как любой треугольник можно разрезать на четыре равных треугольника.

119. Разрежьте прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

120. Разрежьте произвольный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

121. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить непрямоугольный неравнобедренный треугольник.

122. Разрежьте трапецию (рис. 29) на две части, из которых можно сложить треугольник.

15. ОБРАТНЫЙ ХОД

Не то чудо из чудес,
что упал мужик с небес,
а то чудо из чудес,
как он туда залез!

123. Я задумал число, умножил его на два, прибавил три и получил 17. Какое число я задумал?

124. Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша?

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно составить и решить уравнение $(((x+5):3)\cdot 4-6):7=2$, а можно решать без уравнения, «с конца». Различий между этими двумя способами меньше, чем может показаться на первый взгляд: при решении уравнения, по сути, выполняются те же операции, что и при обратном ходе.

125. Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

126. Предложил черт лодырю: «Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки». Трижды перешел лодырь мост — и остался совсем без денег (т. е. отдал в третий раз черту те 24 копейки, что оказались у него к этому моменту). Сколько денег было у лодыря первоначально?

127. Мама положила на стол сливы и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первой пришла Аня, взяла треть слив и ушла. Потом вернулся из школы Боря, взял треть оставшихся слив и ушел. Затем пришел Витя и взял 4 сливы — треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мама?

128. Над озерами летели гуси. На каждом озере садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?

УКАЗАНИЕ. Сначала сообразите, сколько гусей село на последнее озеро. Если ничего не получается, составьте уравнение $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=x$ и решите его. Дальше выясните, сколько гусей село на предпоследнее озеро, составив уравнение $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+1=x$ и решив его (а лучше догадайтесь без уравнений). Заполняя кружочки на рисунке 30 и расставляя числа над стрелками, завершите решение.

Рис. 30

* **129.** Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После одиннадцати таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа начали?

16. ПОЛОЖИТЕ ТРИ СПИЧКИ

Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда.

А. П. Чехов. *«ПИСЬМО К УЧЕНОМУ СОСЕДУ»*

130. Положите на стол три спички, чтобы головки не касались стола. (Ставить спички шалашиком или пользоваться стенами, мебелью и тому подобным запрещено. Нельзя использовать и край стола, свесив с него головки спичек.)

* **131.** Может ли каждая из четырех треугольных стран иметь общий отрезок границы с каждой другой страной?

132. а) Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников, никакие два из которых не имеют общей стороны. (Сторона одного прямоугольника может быть частью стороны другого; нельзя лишь допустить точного совпадения сторон.)

б) Разрежьте прямоугольник на 10 прямоугольников, чтобы никакие два соседних прямоугольника не образовывали прямоугольника. А на 1997 прямоугольников?

* **133.** Расположите 6 неотточенных карандашей так, чтобы каждые два из них соприкасались.

134. Придумайте шестиугольник, который можно разрезать на два треугольника, но нельзя — на два четырехугольника.

17. РАССТАНОВКА СКОБОК И ЗНАКОВ

Работая над решением задачи, всегда полезно знать ответ.

135. Расставьте знаки арифметических действий и скобки, чтобы получились верные равенства:

а) 4 4 4 4=5; б) 4 4 4 4=17; в) 4 4 4 4=20;
г) 4 4 4 4=32; д) 4 4 4 4=64; е) 4 4 4 4=48.

136. Использовав ровно пять раз цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, представьте любое целое число от 0 до 11.

ПОДСКАЗКА. $(3-3)\cdot 333=0$, $33:3+3-3=11$.

137. Использовав ровно пять раз цифру 5, представьте любое целое число от 0 до 10.

ПОДСКАЗКА. $(5-5)\cdot(5+5+5)=0$ и $5+5+(5-5)\cdot 5=10$.

138. Использовав ровно четыре раза цифру 4, скобки и знаки арифметических действий, представьте любое число от 0 до 10.

139. Расставьте, где это требуется, знаки арифметических действий и скобки, чтобы равенства были верными:

а) 5 5 5 5=26; б) 5 5 5 5=30; в) 5 5 5 5 =50;
г) 5 5 5 5=55; д) 5 5 5 5=120; е) 5 5 5 5 =130;
ж) 5 5 5 5=625; з) 5 5 5 5=111; и) 5 5 5 5=2.

140. Использовав четыре раза цифру 7, знаки арифметических действий и скобки, представьте все числа от 0 до 10.

ПОДСКАЗКА. $77-77=0$, $(77-7):7=10$.

141. Расставьте в записи $4\cdot 12+18:6+3$ скобки, чтобы получилось: а) число 50; б) наименьшее возможное число; в) наибольшее возможное число.

142. Ученик написал выражение $6\cdot 8+20:4-2$, значение которого равно 58, но забыл поставить скобки. Сделайте это за него.

143. Между цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, написанными в указанном порядке, поставьте знаки сложения и умножения так, чтобы полученное выражение имело значение 100. (Использовать скобки нельзя. Между любыми двумя соседними цифрами должен стоять знак «+» или «·».)

144. Пять двоек записаны в ряд. Вставляя между некоторыми из них знаки арифметических действий и скобки, можно получать различные числа. Например, $14=(2+2+2)\cdot 2+2$. Получите таким образом число: а) 9; б) 13; в) 113.

---

145. Поставьте в клетках таблицы размером 4×4 десять минусов так, чтобы в каждой строке оказалось четное число минусов, а в каждом столбце — нечетное.

146. Расставьте крестики и нолики в квадрате 5×5 так, чтобы в каждой строке, кроме первой, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждом столбце, кроме последнего, крестиков было меньше, чем ноликов.

18. ОДИН САПФИР И ДВА ТОПАЗА...

147. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза. А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз. Определить прошу я вас, сапфир ценнее иль топаз.

148. Таня пошла покупать ручки и карандаши. На все деньги, которые у нее были, она могла купить 6 ручек. На те же деньги она могла купить 12 карандашей. Но она решила на все деньги купить одинаковое количество ручек и карандашей. Сколько ручек и карандашей она купила?

149. У Ани, Мани, Тани, Вани и Дани яблок было поровну. Когда Аня, Маня и Таня съели по 5 яблок, у них вместе оказалось столько же яблок, сколько у Вани и Дани вместе. Сколько яблок у Вани?

150. Когда скворцы сели по одному на дерево, одному скворцу не хватило дерева, а когда на каждое дерево село по два скворца, одно дерево осталось свободно. Сколько было скворцов?

151. В спортивном зале есть несколько одинаковых скамеек. Если спортсмены сядут по 6 человек на скамейку, то на последнюю скамейку сядут только 3 человека. Если же спортсмены будут садиться по 5 человек на скамейку, то 4 спортсменам места не хватит. Сколько скамеек в спортивном зале?

152. Некоторое число уменьшили на 7 и потом уменьшили в 10 раз. Получили число, которое на 34 меньше исходного. Найдите исходное число.

153. Впишите в кружки (рис. 31) числа так, чтобы каждое следующее в направлении стрелок число получалось из предыдущего при помощи указанного действия.

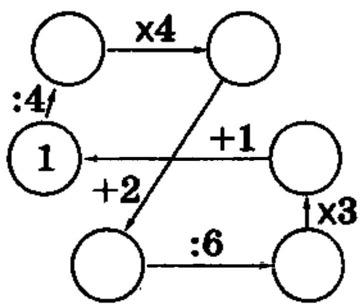


Рис. 31

154. Митя и Витя взвесили свои портфели. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда они положили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг.

— Разве два плюс три равно шести?! — воскликнул Митя.

— У весов сдвинута шкала,— ответил Витя.— Они показывают вес, который отличается на некоторую определенную величину от истинного.

Сколько весили портфели на самом деле?

155. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 26. Найдите уменьшаемое.

156. Один сказал другому: «Дай мне 2 сливы — тогда будет у нас слив поровну». Тот ответил: «Нет, лучше ты дай мне 2 сливы — тогда у меня будет вдвое больше, чем у тебя». Сколько слив было у каждого?

157. У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших корзинах?» — «В моей корзине половина числа рыб, находящихся в корзине у него, да еще 10»,— ответил первый. «А у меня в корзине столько рыб, сколько у него, да еще 20»,— сказал второй. Сколько же у них рыб?

158. Турист проехал автобусом на 80 км больше, чем прошел пешком. Поездом он проехал на 120 км больше, чем автобусом. Какое расстояние он проехал автобусом, если поездом он преодолел в 6 раз большее расстояние, чем пешком?

158. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x = y + 80, \\ z = x + 120, \\ z = 6y. \end{cases}$$

159. В парке живут воробьи, синицы, голуби и вороны — всего 10 000 птиц. Воробьев в 10 раз больше, чем ворон; голубей на 400 больше, чем ворон; синиц на 1400 меньше, чем воробьев. Сколько каких птиц в парке?

---

160. На доске было написано 10 последовательных натуральных чисел. Когда стерли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

161. Сумма двух чисел равна 180, частное от деления большего на меньшее равно 5. Найдите эти числа.

162. Разбейте число 186 на три не равных друг другу натуральных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

163. а) Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

б) Найдите частное, если оно в 2 раза меньше делимого и в 6 раз больше делителя.

164. Найдите два натуральных числа, если их сумма втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения.

19. НАИБОЛЬШЕЕ ЧИСЛО, ВСЕ ЦИФРЫ КОТОРОГО...

165. Найдите наибольшее натуральное число: а) все цифры которого различны; б) все цифры которого различны и которое кратно числу 4.

166. Найдите наименьшее четное число, в десятичной записи которого участвуют все цифры.

167. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 100, сумма цифр которого равна 100.

* **168.** Из числа 1234512345123451234512345 вычеркните 10 цифр, чтобы осталось наименьшее возможное число.

169. Запишем натуральные числа от 1 до 60 в строку одно за другим: 1234567891011121314151617...495051525354555657585960. Вычеркните 100 цифр, чтобы оставшееся число было как можно: а) большим; б) меньшим.

20. ПРИ СОСТАВЛЕНИИ РАСПИСАНИЯ...

170. При составлении расписания уроков на вторник трое преподавателей высказали пожелания, чтобы их уроки были: математика —1-й или 2-й; история —1-й или 3-й; литература —2-й или 3-й. Сколькими способами и как при составлении расписания можно удовлетворить эти пожелания?

171. Придумайте трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают.

172. Разделите 7 полных, 7 пустых и 7 полупустых бочек меда между тремя купцами, чтобы всем досталось поровну и бочек, и меда. (Мед из бочки в бочку не переливать!)

173. На сковороде могут одновременно жариться две котлеты. Каждую надо обжарить с обеих сторон, причем для обжаривания одной стороны требуется 1 мин. За какое наименьшее время можно поджарить три котлеты?

174. На каждой клетке доски 4×4 лежит слива. Уберите 6 слив так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду осталось четное число слив.

175. Кузнец подковывает одно копыто за 5 мин. Лошадь не умеет стоять на двух ногах. а) Сколько времени потребуется 4 кузнецам, чтобы подковать 5 лошадей? б) За какое наименьшее время 48 кузнецов смогут подковать 60 лошадей?

176. Составьте из красных, желтых и зеленых единичных кубиков куб $3\times3\times3$ так, чтобы в любом бруске из трех кубиков все кубики были разного цвета. (Размер бруска $1\times1\times3$. Таких брусков, по-разному ориентированных, всего 27 штук.)

177. Каждые два из шести блоков компьютера соединены проводом. (Всего 15 проводов.) Покрасьте каждый из этих проводов в один из 5 цветов так, чтобы от каждого блока отходило 5 проводов разного цвета.

* **178.** В поединке любых двух из девяти борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Разбейте борцов по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой.

21. КНИГА СТОИТ РУБЛЬ И ПОЛОВИНУ СВОЕЙ СТОИМОСТИ

179. Книга стоит 1 р. и еще половину своей стоимости. Сколько она стоит?

180. На одну чашку весов положили круг сыра, а на другую — $\frac{3}{4}$ такого же круга и еще килограммовую гирю. Установилось равновесие. Сколько весит круг сыра?

181. За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга?

* **182.** Если головоломка, разгаданная перед тем, как разгадали эту, была труднее, чем головоломка, которую разгадали после того, как разгадали головоломку, которую разгадали перед тем, как разгадали эту, то была ли головоломка, которую разгадали перед тем, как разгадали эту, труднее, чем эта?

183. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате число мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, не решивших ее. Кого в классе больше: учеников, решивших задачу, или девочек?

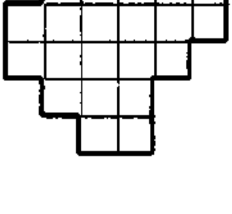
184. «Когда послезавтра станет вчера,— сказала Путанка,— то сегодня будет столь же далеко от воскресенья, как и тот день, который был сегодня, когда позавчера было завтра». В какой день недели она произнесла этот головоломный лепет?

---

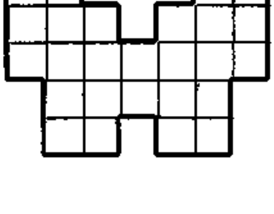
185. Разрежьте каждую из фигур (рис. 32) на четыре равные и по площади, и по форме части.

Рис. 32

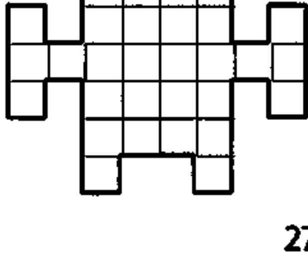
а)



б)



в)



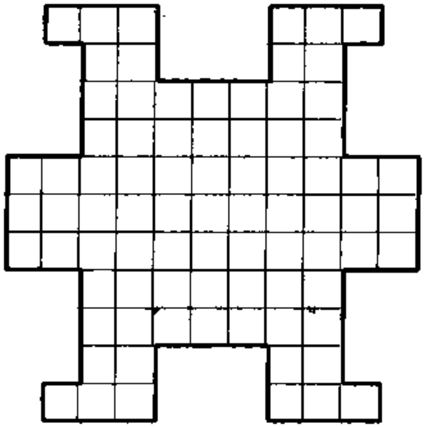


Рис. 33

186. Разрежьте фигуру (рис. 33) на 9 равных частей.

22. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

> ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: «Не могу не заметить, что мне так и не удалось объяснить Вам смысл отрицания, поэтому я не стану утомлять Вас повторением».
> СТУДЕНТ: «Я понял все сказанное и признателен Вам за готовность перейти к новому материалу».

187. В тетради написано 100 утверждений:
В этой тетради ровно одно ложное утверждение.
В этой тетради ровно два ложных утверждения.
. . . .
. . . .
В этой тетради ровно сто ложных утверждений.

Какое из этих утверждений верно?

188. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь»,— подумал Петя. Прав ли он?

189. Рядом сидят мальчик и девочка. «Я мальчик»,— говорит черноволосый ребенок. «Я девочка»,— говорит рыжий ребенок. Если хотя бы кто-то из них врет, то кто здесь мальчик, а кто девочка?

190. — У Вовы больше тысячи книг,— сказал Ваня.
— Нет, книг у него меньше тысячи,— возразила Аня.
— Одна-то книга у него наверняка есть,— сказала Маня.
Если истинно только одно из этих утверждений, сколько книг у Вовы?

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. Если думаете, что у Вовы нет ни одной книги, то ошибаетесь. И если думаете, что у Вовы 1000 книг, то тоже ошибаетесь! Сформулировать ответ к этой задаче не так легко, как может показаться на первый взгляд!!!

191. Три человека (*A*, *B* и *C*) пересчитали кучу шариков четырех цветов. Каждый из них правильно различал два цвета, а два других не различал. Один из них не различал красный и оранжевый, другой не различал оранжевый и желтый, а еще один не различал желтый и зеленый. Глядя на таблицу, узнайте, сколько каких шариков было.

	Красный	Оранжевый	Желтый	Зеленый
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

192. Один из попугаев всегда говорит правду, другой всегда врет, а третий — хитрец — иногда говорит правду, иногда врет. На вопрос: «Кто Кеша?» — они ответили:

Гоша: — Лжец.
Кеша: — Я хитрец!
Рома: — Абсолютно честный попугай.
Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

193. До царя дошла весть, кто-то из трех богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: — Змея убил Добрыня Никитич.
Добрыня Никитич: — Змея убил Алеша Попович.
Алеша Попович: — Я убил Змея.

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил Змея?

194. Четверо ребят — Алеша, Боря, Ваня и Гриша — соревновались в беге. На следующий день они заявили:

Алеша: — Я не был ни первым, ни последним.
Боря: — Я не был последним.
Ваня: — Я был первым.
Гриша: — Я был последним.

Известно, что трое сказали правду, а один соврал. Кто был первым? Кто сказал неправду?

195. Встретились три друга: Белов, Чернов и Рыжов. «Волосы у одного из нас белые, у другого — черные, у третьего — рыжие, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии»,— заметил черноволосый. «Ты прав»,— подтвердил Белов. Какие у кого волосы?

УКАЗАНИЕ. В таблице знаками «—» отмечено, что ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Догадайтесь, для чего в условии сказано, что Белов подтвердил слова черноволосого.

	Белые	Черные	Рыжие
Белов	—		
Чернов		—	
Рыжов			—

196. Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зеленой рубашках. Их туфли были тех же трех цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зеленые, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

197. В конференции участвовало 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервали. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

23. ...ЦИФРА ДЕСЯТКОВ БОЛЬШЕ ЦИФРЫ ЕДИНИЦ?

198. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков: а) больше цифры единиц; б) меньше цифры единиц?

199. На сколько сумма всех четных чисел первой сотни больше суммы всех нечетных чисел этой сотни?

200. Вычислите: а) $1-3+5-7+\ldots+93-95+97-99$;
б) $100\,000-(100\,000-(100\,000-(100\,000-(100\,000-99\,999))))$.

24. СКОЛЬКО СТРАНИЦ В КНИГЕ?

201. Для нумерации страниц в книге потребовалось 2 322 цифры. Сколько страниц в книге? (Хотя это и противоречит типографским традициям, считайте, что нумерация начинается с первой страницы.)

202. Выписаны подряд все натуральные числа:

12345678910111213141516171819 20...

Какая цифра стоит на 2000-м месте?

25. ВСТРЕТИЛИСЬ ТРИ ОХОТНИКА...

...Всякая задача кажется очень простой после того, как вам ее растолкуют.

Шерлок Холмс

203. Встретились три охотника и сварили кашу. Первый дал две кружки крупы, второй — одну, а у третьего крупы не было. Но зато он дал товарищам 5 патронов в качестве платы за кашу. Все ели поровну. Как следует разделить патроны между первым и вторым охотниками?

204. У Ивана было 3 лепешки, а у Петра — 4. Прохожий присоединился к их трапезе, заплатив 7 копеек. Все ели поровну. Как следует распределить деньги между Петром и Иваном?

205. Пять братьев делили наследство отца поровну. В наследстве было три дома. Поскольку дома пилить нельзя, их взяли три старших брата, а меньшим выделили деньги: каждый из трех старших братьев заплатил по 800 р., а меньшие братья разделили эти деньги между собой. Сколько стоил один дом?

26. ПОСТАВЬТЕ ЗНАКИ СЛОЖЕНИЯ...

206. В записи 5 5 5 5 поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно: а) 20; б) 110; в) 560.

207. В записи 8 8 8 8 8 8 8 8 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения, чтобы сумма оказалась равна 1000.

208. Записаны подряд 20 пятерок: 5 5 5...5 5. Поставьте между некоторыми цифрами знак сложения, чтобы сумма оказалась равна 1000.

27. ДРОБИ

Из двух полоумных не сделаешь одного умного.

В. О. Ключевский

209. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток вдвое больше прошедшей?

210. То да это да половина того да этого — во сколько раз больше, чем три четверти того да этого (рис. 34)?

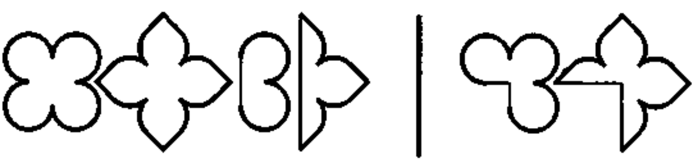


Рис. 34

* **211.** Решите ребус

$$\begin{array}{r} +\ \text{СЛОВ.О} \\ \underline{\text{СЛОВ.О}} \\ \text{ПЕСНЯ} \end{array}$$

212. У Вити на дне рождения было 5 друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$ часть пирога, второму — $\frac{1}{5}$ остатка, третьему — $\frac{1}{4}$ нового остатка, четвертому — $\frac{1}{3}$ оставшегося к этому моменту пирога. Последний кусок Витя разделил пополам с пятым другом. Кому достался самый большой кусок?

УКАЗАНИЕ. Вообразите, что пирог состоит из 6 одинаковых кусков.

213. У Тани и Димы денег поровну. Какую часть денег должна Таня отдать Диме, чтобы у него стало в два раза больше, чем у нее?

214. Числитель и знаменатель некоторой дроби — натуральные числа. Могло ли значение дроби увеличиться от того, что ее числитель увеличили на 1, а знаменатель — на 10?

215. Слава взял у товарища книгу на 3 дня. В первый день он прочитал половину книги; во второй — треть оставшихся страниц; а количество страниц, прочитанных в третий день, было равно половине числа страниц, прочитанных в первые два дня. Успел ли Слава прочитать книгу?

216. Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, что он проехал, смотря в окно. Какую часть всего пути пассажир смотрел в окно?

217. В мешке 24 кг гвоздей. Как на чашечных весах без гирь и без стрелки отмерить 9 кг гвоздей?

217. Отрежьте от шнура длиной $\frac{2}{3}$ м кусок длиной полметра, не пользуясь линейкой.

218. Разделите 5 яблок поровну между шестью детьми, не разрезав никакое яблоко больше чем на 3 части.

219. Я отпил $\frac{1}{6}$ чашечки кофе и долил ее молоком. Затем выпил $\frac{1}{3}$ чашечки и долил ее молоком. Потом я выпил полчашечки и опять долил ее молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. Чего я выпил больше: кофе или молока?

220. Вычислите:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$; г) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.

221. а) Проверьте равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

б) Пусть m и n — такие натуральные числа, что

$$\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Докажите, что m делится на 1979.

УКАЗАНИЕ. Число 1979 простое.

Чтобы сравнить две дроби, обычно приводят их к одному знаменателю и после этого сравнивают числители. Но иногда удобно приводить не к общему знаменателю, а к общему числителю.

222. Устно выясните, какое из чисел больше: $\frac{23}{37}$ или $\frac{115}{187}$.

28. РЯДЫ ФАРЕЯ

Удивительно красивые закономерности возникают иногда там, где их совершенно не ожидаешь встретить. Например, выписав в порядке возрастания несократимые правильные дроби, знаменатели которых не превосходят некоторого заданного числа N, мы получаем N-й ряд Фарея:

1) $$\frac{0}{1}<\frac{1}{1}.$$

2) $$\frac{0}{1}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}.$$

3) $$\frac{0}{1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}.$$

4) $$\frac{0}{1}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{1}{1}.$$

5) $$\frac{0}{1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{1}{1}.$$

На первый взгляд в этих рядах нет ничего интересного. Но посмотрим внимательнее. Следующий, 6-й ряд Фарея отличается от 5-го тем, что добавляются дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{5}{6}$ (все другие правильные дроби со знаменателем 6 сократимы: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$). Гораздо больше новых дробей появляется в 7-м ряде Фарея:

$$\frac{0}{1}<\frac{1}{7}<\frac{1}{6}<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{2}{7}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{5}{7}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}<\frac{1}{1}.$$

223. а) Какие новые дроби появляются в 8-м ряде Фарея? б) Выпишите 8, 9 и 12-й ряды Фарея.

Если вы действительно решили задачу 223, а не просто посмотрели в ответ, то, должно быть, заметили, что дроби, равноотстоящие от краев ряда Фарея, имеют одинаковые знаменатели (например, в 5-м ряде Фарея симметрично расположены относительно $\frac{1}{2}$ следующие пары дробей: $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$). Более того, симметрично расположенные дроби дополняют одна другую до единицы (т. е. их сумма равна числу 1). Объяснение этому простое: если $x<y$, то $1-x>1-y$.

224. **а) Выпишите 18-й ряд Фарея.**

б) Для каждой из дробей $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{18}$, ..., $\frac{12}{18}$ посмотрите, между какими дробями 12-го ряда Фарея она заключена, и сформулируйте закономерность.

Оказывается, верны следующие законы Фарея:

- если $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ – две последовательные дроби ряда Фарея, то
$$bc=ad+1.$$
- если $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{e}{f}$ – три последовательные дроби ряда Фарея, то
$$\frac{c}{d}=\frac{a+e}{b+f}.$$

Доказательства этих законов довольно сложны, поэтому ограничимся следующей задачей, разъясняющей, откуда появляется выражение $\frac{a+e}{b+f}$ – медианта дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{e}{f}$.

225. **Если a, b, e, f — положительные числа и $\frac{a}{b}<\frac{e}{f}$, то значение дроби $\frac{a+e}{b+f}$ заключено между $\frac{a}{b}$ и $\frac{e}{f}$. Докажите это.**

---

226. **Араб завещал старшему сыну половину верблюдов, среднему — четверть, а младшему — пятую часть. А было у него всего 19 верблюдов. Мулла приехал помочь сыновьям разделить наследство. Присоединил своего верблюда к стаду и спросил: «Сколько теперь верблюдов?» — «Двадцать»,— ответили сыновья. «Пусть старший возьмет половину стада, т. е. 10 верблюдов, средний — четвертую часть, т. е. 5 верблюдов, а младший — пятую часть, т. е. 4 верблюда»,— велел мулла и уехал на своем верблюде. Объясните, как могло случиться, что все братья получили больше, чем полагалось по завещанию.**

227. **Вычислите: а)** $\frac{2}{19}-\frac{1}{12}-\frac{1}{76}-\frac{1}{114}$; **б)** $\frac{1}{12}+\frac{1}{57}+\frac{1}{228}-\frac{2}{19}$.

228. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменен буквой x. Найдите этот знаменатель.

229. Пастух привел на бойню две трети от трети своего скота. Оказалось, что это 70 быков. Сколько скота в стаде?

230. Решите уравнения:

а) $1993=1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1-\cfrac{8}{1+\cfrac{4}{1-\cfrac{4}{1-\frac{8}{x}}}}}}$; б) $1994=2+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1-\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1-\cfrac{9}{1-1\frac{9}{x}}}}}}$;

в) $1+2:(1+32:(1+1024:(1+32:(1+2:(1+2:(1+2:(1+2:x)))))))=1987$;

г) $\frac{7x-2}{10}-\frac{6+5x}{6}=\frac{5-2x}{7}-1$; д) $\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}x-1\frac{1}{9}=-2$;

е) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-4}{3}=5$; ж) $\frac{4x}{3}-17+\frac{3x-17}{4}=\frac{x+5}{2}$.

231. При каких целых a число $\frac{a+9}{a+6}$ целое?

232. В классе число отсутствующих учеников составляло $\frac{1}{6}$ часть числа присутствующих. Когда из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

233. Какой угол составляют стрелки часов: а) в 9 ч 20 мин; б) в 11 ч 15 мин?

234. Повстречал гусь стаю: «Здравствуйте, сто гусей!» — «Нас не сто гусей,— ответили ему,— если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да полстолька, да четверть столька, да еще ты, гусь, с нами, так было бы нас сто гусей». Сколько гусей в стае?

235. Назовем положительное дробное число плохим, если оно не представимо в виде суммы нескольких последовательных членов бесконечной последовательности

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)},$$

Верно ли, что плохих чисел, меньших $\frac{1}{2000}$, бесконечно много?

29. ПОЛПУТИ ВДВОЕ МЕДЛЕННЕЕ — ПОТРАТИМ ТО ЖЕ ВРЕМЯ

Во время какой-то осады по городу шел разносчик воды и кричал: «Вода! Вода! Два ведра по шесть су!» Пролетевшая бомба разнесла на куски одно из ведер. «Вода! Вода! Двенадцать су ведро!» — как ни в чем не бывало затянул разносчик.

Шамфор

236. Двое одновременно отправились из пункта A в пункт B. Первый поехал на велосипеде, а второй — на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути автомобиль сломался, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в пункт B?

237. От потолка комнаты вертикально вниз по стене пополали два паука. Спустившись до пола, они пополали обратно. Первый паук полз все время с постоянной скоростью, а второй хотя и поднимался вдвое медленнее первого, но зато спускался вдвое быстрее первого. Какой паук раньше приполз обратно?

238. Путь от дома до школы Буратино прошел пешком. Обратно он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую — на черепахе. Скорость собаки в 4 раза больше, а скорость черепахи в 2 раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шел в школу. На какой путь — от дома до школы или от школы до дома — затратил Буратино больше времени?

* **239.** Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и поехал дальше лишь тогда, когда мотоциклисту осталось проехать треть пути до пункта B. Мотоциклист, доехав до пункта B, сразу поехал обратно. Кто приедет раньше: мотоциклист в пункт A или велосипедист в пункт B?

30. ДУРАЦКИЕ ВОПРОСЫ

240. Шел паломник в Иерусалим и встретил 3 странников. Каждый из них нес 3 мешка, в каждом мешке — по 3 кота. Сколько живых существ двигалось в Иерусалим?

241. Три спички лежат на столе (рис. 35). Удалите спичку из середины, не трогая ее.

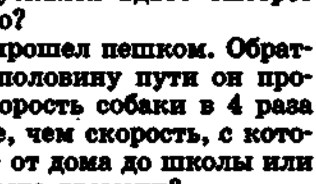


Рис. 35

242. Можно ли так бросить мяч, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

243. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Могло ли получиться 5 корок?

244. Сколько концов у 4 палок? у 5 палок? у 4 с половиной палок?

245. Ничего не ломая и не разрезая, создайте на столе: а) треугольник при помощи одной спички; б) квадрат при помощи двух спичек.

246. Малыш съедает одно пирожное за одну минуту. За какое время он съест 1000 пирожных?

247. Если двенадцать человек, работая по восемь часов в день, должны выкопать яму глубиной в десять с половиной миль, сколько времени пройдет — считая и воскресные дни! — прежде чем они положат свои лопаты?

248. Яблоко стоило 5 к., а груша — 10. Вова купил яблоко, а потом подумал: «Я уже заплатил 5 копеек, и у меня есть яблоко, которое стоит 5 копеек. Если я дам его продавцу, то он получит от меня в сумме 10 копеек. Значит, я смогу взять грушу. Это славно!» Прав ли он?

249. Большой, зеленый, живет под землей и питается камнями. Кто это?

250. Торговец купил некий товар за 7 долларов, продал его за 8, потом вновь купил товар за 9 долларов и продал за 10. Какую прибыль он получил?

251. Ковбой вошел в бар и попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чем дело?

252. Юноша шел по дороге и заметил валявшийся на обочине моток колючей проволоки. Он побежал домой, взял кусачки, вернулся к проволоке и одну за другой откусил все колючки. Затем он бросил проволоку и колючки там, где стоял, и продолжил свой путь, как ни в чем не бывало. В чем дело?

---

253. Продолжите последовательность чисел:

1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, ...

ПОЯСНЕНИЕ. Математик скажет, что можно написать любое число. Да, это так. Строго говоря, задача сформулирована неточно. Но постарайтесь все-таки решить ее, т. е. найдите простое правило, по которому образована эта последовательность. Если не получится, не расстраивайтесь — возможно, вы слишком умны и серьезны для таких шуточек.

Следующую задачу вряд ли можно решить без перебора вариантов. Сомнительна и ее научная ценность. Тем не менее я хочу рассказать об этом курьезе. Есть в нем что-то симпатичное.

254. Рассмотрим четырехзначное число, не все цифры которого одинаковы. Расставим его цифры в порядке убывания и в порядке возрастания. (При этом может получиться число, первая цифра которого равна нулю. Не будем обращать на это внимания.) Вычтем из одного другое. Получим новое четырехзначное число. Например: $9971-1799=8172$ или $8730-378=8352$. (Если получилось число с меньшим числом знаков, допишем спереди нужное количество нулей.) Повторив эту операцию шесть раз, получим какое-то число. Какое?

255. Впишите в пустые клетки таблицы недостающие числа.

7	10	13
22		30
4	9	

256. Разрежьте фигуру (рис. 36) на 4 равные части четырьмя разными способами. (Резать можно только по сторонам клеточек.)

257. а) На рисунке 37, *а* квадрат размером 4×4 разрезан на четыре одинаковые части. Придумайте еще 4 способа.
б) На рисунке 37, *б* квадрат размером 5×5, из которого вырезана центральная клетка, разрезан на четыре равные части. Придумайте еще 6 способов. (Резать можно только по сторонам клеточек.)

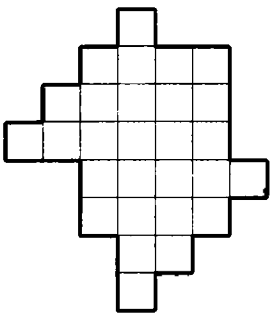


Рис. 36

а) *б)*

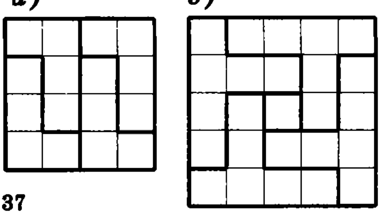


Рис. 37

31. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Конкурс блондинок. 500 блондинок в зале, одна — на сцене. Ведущий спрашивает:
— Сколько будет дважды два?
— Пять,— отвечает блондинка.
— Дайте ей шанс! Дайте ей шанс! — скандируют блондинки.
— Хорошо,— соглашается ведущий.— Сколько будет дважды два?
— Три,— отвечает блондинка.
— Дайте шанс! Еще один шанс! — скандируют блондинки.
— Ну, ладно,— уступает ведущий.— Сколько будет дважды два?
— Четыре,— отвечает блондинка.
— Дайте ей шанс! Еще один шанс! — скандируют блондинки.

Не пользуйтесь, изучая арифметику, калькулятором! В магазине, в конструкторском бюро, вообще в реальной жизни — пожалуйста. А на уроке математики нельзя! Ведь математика учит думать, а не просто нажимать на кнопки.

К сожалению, многие радуются возможности быстро решать арифметические примеры при помощи калькулятора. И не понимают, что возможность избавить школьников от вычислений была всегда. Посадите знатока (например, отличника-шестиклассника), и он решит все примеры! Издайте книжку с ответами — и все будут учиться только на пятерки! А что такое сложение, умножение, — знать никому не надо, в книге все ответы даны!

Вычислите:

258. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{18}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

259. $$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}.$$

260. $$\frac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:\left(\frac{6}{5}-0{,}95\right).$$

261. $$\frac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}+\frac{\frac{7}{10}+33{,}3}{1{,}6\cdot 10\frac{19}{32}+\frac{1}{20}}.$$

262. $$\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):(0{,}358-0{,}108)\right)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}.$$

263. $$\frac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}.$$

264. $$\left(\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43.$$

265. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}+31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}.$

266. $5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$

267. $158\cdot\left(\dfrac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{298}-\frac{4}{85}}:\dfrac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\cdot\dfrac{505505505}{711711711}.$

268. $\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\frac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\frac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5.$

269. $\left(\dfrac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:\frac{1}{5}}-\dfrac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}.$

270. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right).$

271. $\dfrac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\frac{5}{6}\cdot 1{,}2+0{,}8}\cdot\dfrac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3{,}6}{0{,}505\cdot\frac{2}{5}-0{,}002}.$

272. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}.$

273. $\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\dfrac{2}{13+\dfrac{1}{2+\frac{3}{4}}}-\left(0{,}6:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+3{,}75\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}-0{,}6.$

274. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)}\cdot\dfrac{2{,}22+\dfrac{7}{24-\frac{2}{3}}}{1-\dfrac{1}{2+\frac{1}{6}}}.$

* **275.** $$\frac{\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right)}{\left(30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}\right)\cdot 0{,}1}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-\dfrac{1}{20}+\left(3+\dfrac{133}{14-\dfrac{3}{2}}\right):\dfrac{31}{25}}{\left(\dfrac{3\dfrac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\dfrac{1}{3}}\ \dfrac{4{,}6-2\dfrac{1}{3}}{4{,}6+2\dfrac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\dfrac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)}.$$

276. Найдите X из пропорции:

$$\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\dfrac{1}{7}-1\dfrac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\frac{3\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}:\dfrac{1}{6}}{41\dfrac{23}{84}-40\dfrac{49}{60}}.$$

32. ПЕРЕЛИВАНИЯ

Я чуть не плакал. Не было удачи!
Задача не решалась — хоть убей.
Условье было трудным у задачи.
Дано: «Летела стая лебедей».
Я, щеку грустно подперев рукою,
Делил, слагал — не шли дела на лад!
Но, лишь глаза усталые закрою,
Я видел ясно: вот они — летят...

Е. Винокуров

277. Имеются два ведра: одно емкостью 4 л, другое — 9 л. Можно ли набрать из реки ровно 6 л воды?

278. Можно ли отмерить 8 л воды, находясь у реки и имея два ведра: одно вместимостью 15 л, другое вместимостью 16 л?

279. Имеются двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Каша должна вариться 15 мин. Как сварить ее, перевернув часы минимальное количество раз?

280. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. (Никаких сосудов, кроме данных трех, нет. На землю ничего выплескивать нельзя, так что в конце концов должно оказаться 4 л в восьмилитровом сосуде и 4 л в пятилитровом.)

281. Отлейте из цистерны 13 л молока, пользуясь бидонами емкостью 17 и 5 л.

282. Двенадцативедерная бочка наполнена керосином. Разлейте его на две равные части, пользуясь пустыми пятиведерной и восьмиведерной бочками.

283. В баке не менее 10 л бензина. Можно ли отлить 6 л с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

284. В бочке не менее 13 ведер бензина. Можно ли отлить 8 ведер с помощью девятиведерной и пятиведерной бочек?

285. Имея два полных десятилитровых бидона молока и пустые четырехлитровую и пятилитровые кастрюли, отмерьте по 2 л молока в каждую кастрюлю.

33. ПРЯМОУГОЛЬНИК ИЗ КВАДРАТОВ

286. Прямоугольник на рисунке 38 составлен из квадратов. Найдите длину стороны самого большого квадрата, если длина стороны самого маленького равна 1.

РЕШЕНИЕ. Пусть длина стороны самого большого квадрата равна x. *Тогда, двигаясь от большого квадрата по часовой стрелке, последовательно получаем длины сторон других квадратов:* $x-1$, $x-2$, $x-3$. *Из равенства верхней и нижней сторон прямоугольника получаем, что* $x+(x-1)=(x+2)+(x-3)+(x-3)$, *т. е.* $2x-1=3x-8$, *откуда* $x=7$.

Можно обойтись и без уравнения. Начав с самого большого квадрата, совершим обход по часовой стрелке. Сторона правого верхнего квадрата на 1 меньше стороны левого верхнего. Еще на 1 меньше сторона правого нижнего квадрата. Еще на 1 меньше сторона среднего нижнего квадрата. Наконец, общий отрезок самого большого квадрата и только что упомянутого среднего нижнего квадрата еще на 1 меньше.

287. Фигура на рисунке 39 составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького равна 1.

Можно обнаружить, что в некоторой аналогичной (но чуть более сложной) конструкции сторона нижнего правого квадрата всегда имеет длину 15. Добившись, чтобы этот квадрат был заподлицо с правой границей двух других правых квадратов, т. е. решив некоторое уравнение, найдем замечательный пример — разбиение прямоугольника на 9 квадратов разного размера.

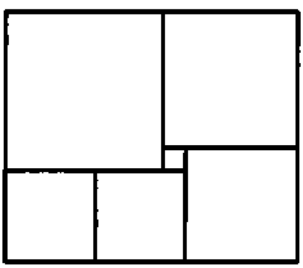


Рис. 38

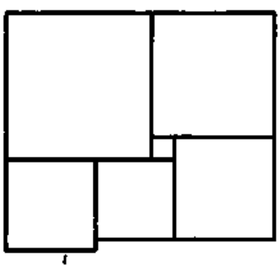


Рис. 39

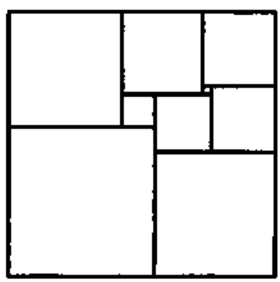


Рис. 40

288. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник шириной 33 и высотой 32 клетки и разрежьте его на квадраты, как показано на рисунке 40. (Резать можно только вдоль линий сетки.)

34. ОСТРОВ РЫЦАРЕЙ И ЛЖЕЦОВ

Шерлок Холмс и доктор Ватсон летели на воздушном шаре над незнакомой местностью.

— Послушайте! — окликнул Холмс случайного прохожего.— Где мы находимся? Хотя бы приблизительно?

Тот внимательно посмотрел на них и ответил:

— Почему приблизительно? Я отвечу абсолютно точно. Вы в гондоле воздушного шара.

Очередной порыв ветра понес шар дальше, в неизвестном направлении, и Холмс раздраженно буркнул:

— Проклятые математики!

— Почему Вы считаете, что он математик? — удивился Ватсон.

— Прежде чем ответить, он подумал. А главное, его ответ был абсолютно точен и бесполезен.

В следующих шести задачах дело происходит на острове, где живут рыцари (они всегда говорят правду) и лжецы (они всегда лгут).

289. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова?

290. Каждый из собравшихся на площади жителей заявил остальным: «Все вы — лжецы». Сколько рыцарей среди них?

291. Каждый из а) 7; б) 9 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Кто за столом?

292. Представьте, что все лжецы острова живут в одном городе, а все рыцари — в другом. Как выяснить у аборигена, куда ведет интересующая нас дорога — в город рыцарей или в город лжецов?

293. Какой вопрос вы задали бы жителю острова, чтобы узнать, живет ли у него дома ручной крокодил?

294. Некоторые жители острова рыцарей и лжецов заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечетным?

---

295. Вася сказал, что на его дне рождения было больше 6 гостей. А его сестра сказала, что гостей было больше 5. Сколько было гостей, если известно, что одно утверждение верное, а другое ложное?

296. В правительстве 20 министров. По крайней мере один из них честен. Из любых двух министров хотя бы один продажен. Сколько честных министров?

297. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

298. Каждый из четырех гномов — Беня, Веня, Женя и Сеня — либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали разговор:
Беня — Вене: «Ты врун».
Веня — Жене: «Сам ты врун!»
Женя — Сене: «Оба они вруны. Да и ты тоже».
Кто из них говорит правду?

299. Приказом Малюты Скуратова один из экзаменационных вопросов для сотрудников секретных служб был строго засекречен. Поэтому сейчас содержание этого вопроса уже никому не известно. Но возможные ответы засекречены не были (рис. 41). Определите, какой ответ является правильным.

---

300. Восстановите по некоторым сохранившимся номерам (рис. 42) путь коня, побывавшего по одному разу на всех клетках доски 6×6 (т. е. расставьте числа от 1 до 36 так, чтобы отличающиеся на 1 числа были связаны ходом коня).

301. Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады отпустить тебя, но по нашему закону ты сначала должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Помогите Робинзону!

302. Конь обошел всю доску и вернулся последним ходом на исходное поле. Восстановите весь маршрут по указанным (в порядке их обхода конем) на рисунке 43 номерам полей.

Рис. 41

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

Рис. 42

Рис. 43

52		16					
					48		32
36							
	4				44		60
8		40				12	
							24
20		64					
			56		28		

303. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано:

$\boxed{А}$, $\boxed{Б}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$.

(О том, что на обратных сторонах, ничего не известно.) Какие карточки надо перевернуть, чтобы узнать, правда ли, что если на какой-то стороне карточки написано четное число, то на другой стороне — гласная буква?

304. Два мудреца написали на семи карточках числа от 5 до 11. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а две оставшиеся карточки они не глядя спрятали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?

305. Для какого натурального числа x среди неравенств $2x>70$, $x<100$, $3x>25$, $x>10$ и $x>5$ три верны и два не верны?

35. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Как ни богато естество,
играющее в нас,
необходимо мастерство,
гранящее алмаз.

И. Губерман

«Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический»,— писал Исаак Ньютон в учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется перевод, Ньютон показал на примерах. Вот один из них:

На русском языке	На языке алгебры
Купец имел некоторую сумму денег	x
В первый год он истратил 100 фунтов	$x-100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$

На русском языке	На языке алгебры
и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2800}{9}$
В третьем году он опять истратил 100 фунтов	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
После того, как он добавил к остатку третью его часть,	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
капитал стал вдвое больше первоначального	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить уравнение $64x-14800=54x$. Ответ: $x=1480$.

306. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост ее весит 1 кг. Сколько весит рыба?

307. Ученик должен был разделить число на 2 и к результату прибавить 3, а он по ошибке умножил число на 2 и от полученного произведения отнял 3. Ответ все равно получился правильный. Какой?

308. Хозяин обещал работнику за год 12 р. и кафтан. Но тот ушел через 7 месяцев. При расчете он получил кафтан и 5 р. Сколько стоит кафтан?

309. В магазине спортивных товаров туристы покупали снаряжение. Первый купил топорик и спальный мешок, заплатив 18 р. Второй купил два спальных мешка и рюкзак, заплатив 35 р. Третий купил топорик, спальный мешок и палатку, заплатив 68 р. Четвертый купил рюкзак, два спальных мешка и две палатки. Сколько заплатил четвертый турист?

310. Бутылка и стакан весят столько же, сколько кувшин. Бутылка весит столько же, сколько стакан и тарелка. Два кувшина весят столько же, сколько три тарелки. Сколько стаканов уравновешивают одну бутылку?

311. Написали два числа. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвертое и т. д. Чему равна сумма шести выписанных чисел, если пятое равно 7?

312. Карандаш в 6 раз дешевле альбома, а ручка в 2 раза дешевле альбома. Альбом стоит на 2 р. больше, чем ручка и карандаш вместе. Сколько стоят карандаш, ручка и альбом по отдельности?

313. В трех ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

314. Надпись на камне над могилой Диофанта (греческий математик, III в. н. э.): «Здесь погребен Диофант, и камень могильный расскажет, сколь долог был век его жизни. Часть шестую ее составляло прекрасное детство, двенадцатой части равна его светлая юность. Еще часть седьмая прошла — браком себя сочетал. Пять лет прошло — и послал Гименей ему сына, коему рок половину лишь жизни прекрасной дал по сравнению с отцом. И в печали глубокой старец кончину воспринял, четыре лишь года с тех пор прожив, как сына лишился». Скольких лет жизни достигнув, смерть воспринял Диофант?

315. Четверо товарищей покупают лодку. Первый вносит половину суммы, вносимой остальными, второй — треть суммы, вносимой остальными, третий — четверть суммы, вносимой остальными, а четвертый — 130 р. Сколько стоит лодка?

ПОДСКАЗКА. Какую долю стоимости лодки внес первый? А какую долю стоимости внес четвертый?

316. Представьте число 45 в виде суммы четырех чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 от второго числа, умножения третьего числа на 2 и деления четвертого числа на 2 эти числа становятся равными.

317. Известно, что 4 персика, 2 груши и яблоко вместе весят 550 г, а персик, 3 груши и 4 яблока вместе весят 450 г. Сколько весят персик, груша и яблоко вместе?

318. Передо мной лежат три стопки тетрадей. Если из первой переложить в третью 2 тетради, то во второй и третьей стопках тетрадей станет поровну. Если из первой переложить в третью 3 тетради, то поровну станет в первой и третьей стопках. Сколько тетрадей нужно переложить из первой стопки в третью, чтобы поровну стало в первой и второй стопках?

319. Истратив половину денег, я заметил, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек[1], и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратил?

320. В Великобритании и США температуру раньше измеряли по шкале Фаренгейта, в которой температура плавления льда (т. е. 0° Цельсия) составляет 32°, а температура кипения воды (100° Цельсия) — 212°. Формула для перевода температуры из одной шкалы в другую такова: $T_ф = kT_ц + b$, где $T_ф$ и $T_ц$ — температуры по Фаренгейту и по Цельсию.

а) Найдите числа k и b.

б) Существует ли температура, числовые значения которой по шкалам Цельсия и Фаренгейта одинаковы?

---

[1] Подразумевается, что число копеек меньше 100.

36. ПОВОРОТЫ

> Красоту математики (ее простоту, симметрию, сжатость и полноту) можно и следует дать почувствовать даже очень маленьким детям. Когда этот предмет излагают должным образом и притом конкретно, усвоение математики сопровождается эмоциями и наслаждением красотой.
>
> Д. Юнг

321. Сколько всего квадратов изображено на рисунке 44?

322. Нарисуйте три равных треугольника, из которых можно составить треугольник.

323. Сколько всего треугольников изображено: а) на рисунке 45, *а*; б) на рисунке 45, *б*?

324. На полях a1, b2, c3 и d4 шахматной доски стоят цифры 1, 2, 3 и 4 (рис. 46). Разделите доску на четыре одинаковые части так, чтобы в каждой из частей находилась в точности одна цифра.

* **325.** Разрежьте фигуру (рис. 47) на две части и сложите из них целый квадрат 8×8.

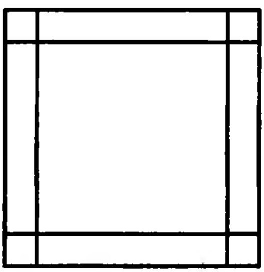


Рис. 44

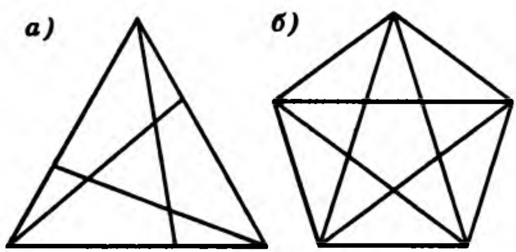


Рис. 45

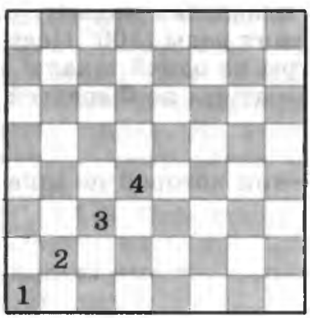


Рис. 46

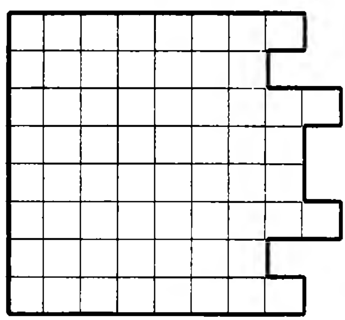


Рис. 47

326. Одна монета лежит неподвижно, а другая такая же монета катится вокруг нее (рис. 48). Сколько раз подвижная монета обернется вокруг своего центра, прежде чем вернется в исходное положение? (Обязательно проведите эксперимент!)

Рис. 48

37. ПРОЦЕНТЫ

— Так это же известная задача!
— А как она решается?
— Да нет! Условие известное, а решения я не знаю.

327. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

328. В школе 700 учащихся. Среди них 357 мальчиков. Сколько процентов учащихся этой школы составляют мальчики?

329. Разложите 80 тетрадей на две стопки так, чтобы число тетрадей в одной из них составляло 60% числа тетрадей в другой.

330. После снижения цен на 30% свитер стоит 210 р. Сколько стоил свитер до снижения цен?

331. Как изменится цена товара, если сначала ее увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?

332. Множимое увеличили на 50%, а множитель уменьшили на 50%. Как изменилось произведение?

333. Произведение трех чисел равно 1000. Первые два сомножителя увеличили на 10%, а третий уменьшили на 20%. Чему равно произведение трех полученных чисел?

334. Что больше: 15,5% от 49 или 49% от 15,5?

335. Цена картофеля повысилась на 20%. Через некоторое время цена понизилась на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения цены?

335. Шаги низкого на 20% короче, чем шаги высокого, но зато он за то же время делает на 20% больше шагов, чем высокий. Кто ходит быстрее?

336. *A*, *B* и *C* состязались в беге на 100 м. Когда *A* финишировал, *B* отставал от него на 10 м. Когда *B* финишировал, *C* отставал на 10 м. На сколько отставал *C* от *A*, когда *A* закончил бег?

336. В одном магазине цены уменьшили на 10%, а потом еще на 10% (от нового уровня), а в другом цены просто сразу снизили на 20%. Что выгоднее для покупателя?

337. За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?

338. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

339. Вода Тихого океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

340. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

341. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

342. В кружке, где занимается Миша, более 93% участников — девочки. Чему равно наименьшее возможное число участников кружка?

343. Какое наименьшее число участников может быть в кружке левитации, если мальчиков в нем меньше 50%, но больше 40%?

343. Для какого наименьшего натурального числа n существует дробь со знаменателем n, находящаяся между числами 0,4 и 0,5?

344. При замерзании вода увеличила свой объем на $\frac{1}{11}$ часть (рис. 49). На какую часть своего объема уменьшится лед при обратном превращении в воду?

345. По кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на $\frac{1}{5}$?

346. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объем выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?

347. В сосуде было 20 л спирта. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде спирта оказалось втрое меньше, чем воды. Какую часть отливали?

348. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

349. Джеймс отправился в путь, предполагая каждый день проходить $\frac{1}{3}$ всего пути, чтобы через 3 дня прибыть на место. В первый день он действительно прошел $\frac{1}{3}$ пути, но

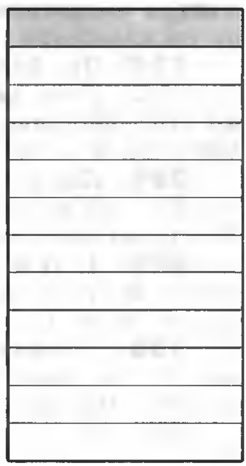


Рис. 49

во второй день, устав, он прошел не $\frac{1}{8}$ пути, а $\frac{1}{8}$ остатка. И в третий день прошел $\frac{1}{8}$ нового остатка. В результате ему осталось пройти еще 32 км. Сколько километров он прошел в первый день?

350. В сентябре проездной билет на метро стоил 800 р. В октябре стоимость билета увеличилась, в результате чего число проданных билетов уменьшилось на 25%, а выручка от их продажи уменьшилась на 6,25%. Сколько стал стоить проездной билет в октябре?

351. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег на 40% больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трехзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?

352. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

38. ПЕРЕБОР

353. Несколько косточек из набора домино уложили так, как показано на рисунке 50. Определите расположение косточек (т. е. покажите, где проходят границы между ними).

354. Летела стая одноголовых сороконожек и трехглавых драконов. Вместе у них: а) 26 голов и 298 ног; б) 648 ног и 39 голов. Сколько ног у дракона?

* **355.** В квадрате размером 6×6 клеток некоторые клетки закрасили так, что из любой закрашенной клетки можно пройти в любую другую закрашенную клетку, переходя только через их общие стороны. Может ли среди закрашенных клеток быть 12 таких, которые имеют общую сторону ровно с одной закрашенной клеткой?

ПОЯСНЕНИЕ. На рисунке 51,*а* всего 3 закрашенные клетки обладают свойством «иметь общую сторону ровно с одной закрашенной клеткой», а на рисунке 51,*б* таких клеток 6.

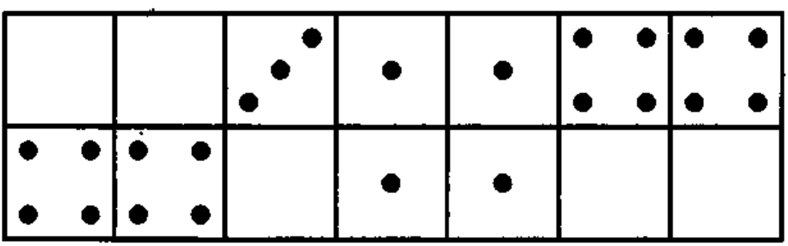


Рис. 50

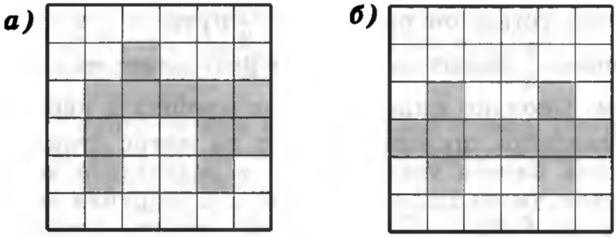


Рис. 51

***.. 356. Найдите путь от левого верхнего «а» до «я» (рис. 52), который проходит по одному разу по каждой букве алфавита. (Ходить разрешается только на соседнюю букву по вертикали или горизонтали.)**

Случайно догадаться до ответа к задаче 356 невозможно. Самое разумное – действовать последовательно-логически, постепенно проясняя ситуацию.

В следующей задаче тоже не надейтесь на удачу: вариантов очень много, наверняка запутаетесь. Лучше закрашивайте клетки одну за другой, каждый раз находя такую, чтобы это можно было сделать единственным образом.

а)

а	о	д	т	ч	з	у	а
р	и	щ	ш	й	п	к	ю
ю	й	н	ы	ж	е	щ	т
п	г	л	ц	ь	ъ	э	б
ч	и	б	ш	г	ъ	ф	л
д	м	ь	ж	н	э	с	е
х	ё	ц	о	ы	ф	р	с
в	к	з	в	ё	м	х	я

б)

а	б	н	ю	р	д	е	ю
ж	ш	м	д	к	ш	ж	р
ъ	у	ы	л	м	б	ъ	а
о	ы	в	ф	э	у	е	х
ч	й	щ	с	ь	г	л	н
ц	ф	з	щ	с	т	й	к
п	ё	т	ь	п	э	ц	ч
и	в	ё	г	з	о	и	я

в)

а	х	е	ы	б	ж	к	щ
н	с	п	р	щ	о	ш	о
з	ё	у	ъ	е	м	й	ь
в	х	в	и	п	ф	ч	н
ш	у	г	л	ц	ю	д	ё
а	м	ы	э	ц	л	и	з
т	ж	ч	б	э	ю	ъ	р
й	ь	к	с	г	д	ф	я

г)

а	г	л	о	щ	й	з	т
ё	ч	у	а	ч	в	ы	е
в	и	т	к	ц	э	б	и
д	м	ц	ю	ш	ы	х	п
ъ	л	з	с	ъ	ф	ь	н
э	ф	н	ю	к	ш	п	м
ё	д	е	б	ь	й	ж	щ
р	ж	с	х	у	р	г	я

Рис. 52

357. Начав с верхнего левого угла (рис. 53), пройдите в нижний правый угол, переступая только через стороны квадратиков (не через вершины!) и побывав в каждом белом квадрате по одному разу (в цветные клетки заходить нельзя!).

358. Закрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном и в каждом выделенном блоке (рис. 54) все цвета встречались по одному разу.

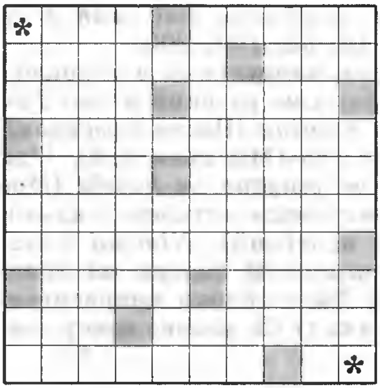


Рис. 53

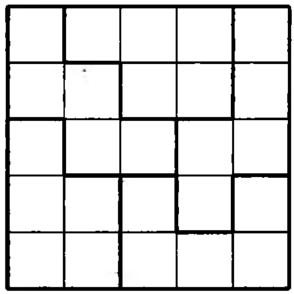


Рис. 54

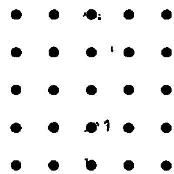


Рис. 55

359. Отметьте 10 точек на рисунке 55, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой.

360. Однажды у знаменитого индийского математика Рамануджана спросили, чем замечательно число 1729. «Так это же наименьшее натуральное число, которое представимо в виде суммы кубов двух натуральных чисел двумя разными способами!» — воскликнул он. Найдите эти представления.

39. ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

361. Даны французские слова *tour, face, coucher, attacher, passage, orange, variété, chance, torche, rager, image, courage, révérence* и их переводы в перепутанном порядке: факел, смелость, проход, лицо, почтение, привязывать, поездка, образ, разнообразие, лежать, удобный случай, апельсин, неистовствовать. Установите, какое французское слово какому русскому соответствует.

362. Вот обозначения некоторых дат на языке суахили: *tarehe tatu Disemba jumamosi; tarehe pili Aprili jumanne; tarehe nne Aprili jumanne; tarehe tano Octoba jumapili; tarehe tano Octoba jumatatu; tarehe tano Octoba jumatano*. А вот их переводы на русский язык (в перепутанном порядке): 5 октября, понедельник; 2 апреля, вторник; 5 октября, среда; 5 октября, воскресенье; 3 декабря, суббота; 4 апреля, вторник. Как написать на языке суахили следующие даты: а) 3 апреля, среда; б) 2 декабря, воскресенье?

363. Вот несколько айнских числительных (в латинской транскрипции):
3 — *re*;
11 — *shine ikashma wan*;
22 — *tu ikashma hotne*;
37 — *arwan ikashma wan e tu hotne*;
47 — *arwan ikashma tu hotne*;
93 — *re ikashma wan e ashikne hotne*;
135 — *ashikne ikashma wan e arwan hotne*.
Определите, какое число записывается по-айнски как *wan e re* hotne. Запишите по-айнски числа: 1, 5, 12, 53, 100, 200.

364. Даны фразы на китайском языке, записанные в упрощенной латинской транскрипции, и их переводы на русский язык: *Tad gangbi haokan* (Его ручка красивая), *Ger haoting* (Песня красивая), *Wo chi pingguo* (Я ем яблоко), *Women he cha* (Мы пьем чай), *Wod gangbi bu xie* (Моя ручка не пишет), *Wod pingguo bu haochi* (Мое яблоко невкусное), *Ni xue zhongwen* (Ты изучаешь китайский язык), Zhongwen bu haoxue (Китайский язык нелегкий), *Nimend hanzi haoxie* (Ваш иероглиф легкий), *Wo kan niunai* (Я смотрю на молоко). Переведите на китайский язык: а) Твое яблоко некрасивое; б) Вы пишете иероглиф; в) Он слушает песню; г) Их молоко невкусное.

40. ВОЗРАСТЫ

Некая дама на вопрос, сколько ей лет, ответила: «Когда я выходила замуж, мужу было 40, а мне 20. Сейчас ему 60. Значит, мне 30».

365. Сереже 11 лет, Вове 1 год. Сколько лет будет Сереже, когда он станет втрое старше Вовы?

366. У 35-летнего отца 4 сына. Каждый младше другого на 2 года, причем старшему 8 лет. Через сколько лет детям вместе будет столько же лет, сколько отцу?

367. Если к половине моих лет прибавить 7, то получите мой возраст 13 лет тому назад. Сколько мне лет?

368. а) Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года. Сейчас сыну в 3 раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет каждому из них?
б) Решите уравнение $27+x=3(x+3)$.

369. Абдулла вчетверо старше Махмуда. Сумма их возрастов — 50 лет. Через сколько лет Абдулла будет втрое старше Махмуда?

370. Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

371. Некто сказал: «Когда я проживу еще половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет». Сколько ему лет?

372. Москва старше Петербурга на 556 лет. В 1981 г. Москва была втрое старше Петербурга.
а) В каком году основана Москва и в каком году основан Петербург?
б) Когда Москва станет ровно вдвое старше Петербурга?

373. Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе: сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет каждому?

374. Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

РЕШЕНИЕ. Обозначим искомый срок через x. Спустя x лет отцу будет $32+x$, а сыну $5+x$. Поскольку отец должен быть в 10 раз старше сына, то имеем уравнение $32+x=10(5+x)$. Решая его, получаем $x=-2$. «Через минус 2 года» означает «два года назад». Составляя уравнение, мы не думали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз больше возраста сына. Уравнение «позаботилось» обо всем само.

375. Тоне больше лет, чем будет Гале, когда Жене исполнится столько лет, сколько Тоне сейчас. Кто из них самая старшая, а кто самая младшая?

376. Моему брату через 2 года будет вдвое больше лет, чем ему было 2 года назад, а моя сестра через 3 года будет втрое старше, чем 3 года назад. Кто из них старше?

377. Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько мне лет, если нам вместе 70 лет?

РЕШЕНИЕ. Составим таблицу:

	Мой возраст	Ваш возраст
Сейчас	x	y
Тогда[1]	y	$\frac{x}{2}$

Подсчитав двумя способами время, отделяющее «сейчас» от «тогда», составим уравнение:

$$x-y=y-\frac{x}{2},$$

откуда $\frac{3}{2}x=2y$. Значит, $3x=4y$. Поскольку $x+y=70$, ответ очевиден: $x=40$, $y=30$, т. е. мне сейчас 40 лет, Вам — 30.

378. Альфире втрое больше лет, чем было Эльдару, когда она была в его нынешнем возрасте. Когда он будет в ее нынешнем возрасте, им вместе будет 28 лет. Сколько сейчас лет Альфире и сколько Эльдару?

---

[1] «Тогда» относится ко времени, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас.

379. Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре вместе будет 100 лет?

380. Юре и Юле сейчас вместе 26 лет, причем Юле в 3 раза меньше лет, чем будет Юре тогда, когда им вместе будет в 5 раз больше, чем Юре сейчас. Сколько лет сейчас Юре?

---

381. Доску размером 8×8 разрезали на четыре части и сложили из них прямоугольник размером 5×13 (рис. 56). Откуда появилась лишняя клетка?

382. Сравните рисунки 57,*а* и 57,*б*. Откуда возникает лишняя клетка?

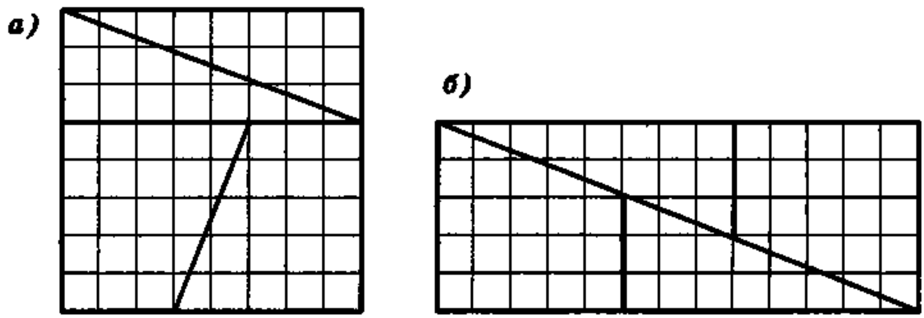


Рис. 56

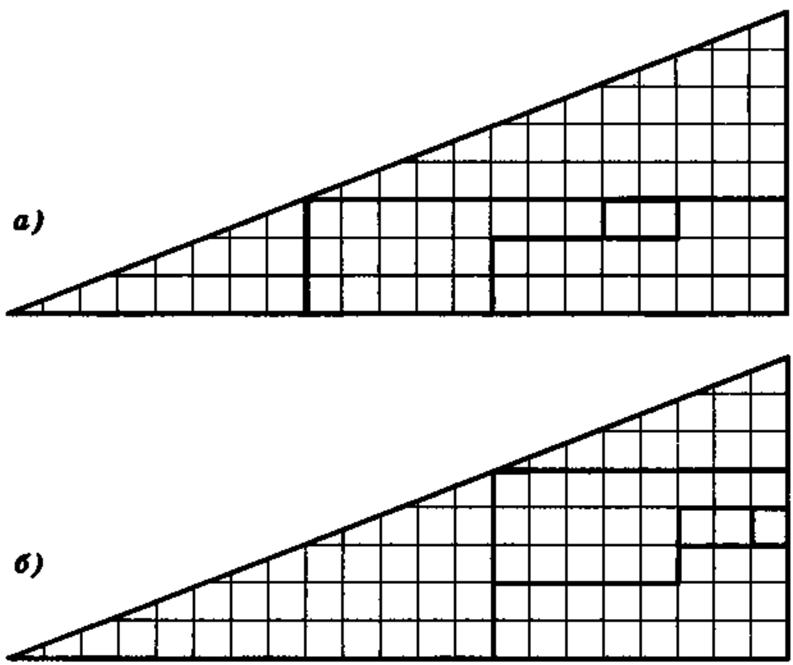


Рис. 57

а) б) в)

Рис. 58

383. На рисунке 58 показаны разные способы расстановки на шахматной доске 24 коней, каждый из которых бьет ровно двух других. Расставьте на доске 32 коня, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

41. ГОНКИ

> В наши дни портреты пишут за семь минут, рисовать обучают за три дня, английский язык втолковывают за сорок уроков, восемь языков одновременно преподают с помощью нескольких гравюр, где изображены различные предметы и названия их на этих восьми языках.
> Словом, если бы можно было собрать воедино все наслаждения, чувства и мысли, на которые пока что уходит целая жизнь, и вместить их в одни сутки, сделали бы, вероятно, и это. Вам сунули бы в рот пилюлю и объявили: «Глотайте и проваливайте!»
>
> Шамфор.
> *«МЫСЛИ И МАКСИМЫ»*

384. Машина едет со скоростью 60 км/ч. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

385. Между лисой и зайцем 10 м. Когда лиса поймает зайца, если она бежит со скоростью 8 м/с, а он — со скоростью 7 м/с?

386. Послан человек из Москвы в Вологду, и проходит он каждый день 40 верст. На следующий день вслед за ним послан другой человек, проходивший 45 верст в день. Когда второй догонит первого?

387. В дневнике у Вовочки уже записано 200 замечаний, а у Машеньки — 112. Через сколько недель они сравняются, если Машенька получает на 22 замечания в неделю больше, чем Вовочка?

388. В 336-ведерную емкость каждый час через одну трубу втекает 70 ведер воды, а из другой трубы вытекает 42 ведра. За какое время емкость наполнится?

УКАЗАНИЕ. Каждый час количество воды в емкости увеличивается на $70-42=28$ ведер. Чтобы найти время, нужно разделить 336 на 28.

389. В двух сосудах находится по 540 л воды. Из одного вытекает по 25 л в минуту, а из другого — по 15 л. Через какое время во втором сосуде воды останется в 6 раз больше, чем в первом?

390. Через час после начала равномерного спуска в бассейне осталось 400 кубометров воды, а еще через 3 часа — 250. Сколько воды было в бассейне?

УКАЗАНИЕ. Ответ очевиден из рисунка 59. Можно найти его и без графика, вычислив, сколько воды вытекает из бассейна за час.

391. Я иду от дома до школы 30 мин, а мой брат — 40 мин. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 мин раньше меня?

УКАЗАНИЕ. На весь путь от дома до школы я трачу на 10 мин меньше брата. Значит, на половину пути я потрачу на 5 мин меньше. Мы встретимся ровно на половине пути от дома до школы. Эту задачу можно решить и с помощью графика (рис. 60).

392. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шел вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Спустя 10 с пассажир вышел из трамвая и пошел догонять своего знакомого. Через сколько секунд он догонит знакомого, если он идет в 2 раза быстрее знакомого и в 5 раз медленнее трамвая?

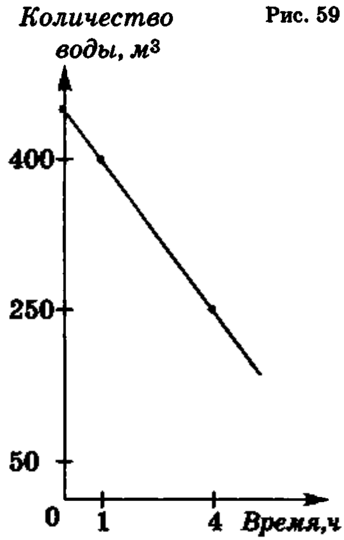
УКАЗАНИЕ. На рисунке 61 изображены графики движения пассажира и знакомого.

393. Грузовик проезжает некоторое расстояние за 10 ч. Если бы он проезжал в час на 10 км больше, то тот же путь занял бы 8 ч. Какова скорость грузовика?

394. Два автомобилиста одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 7 ч между ними осталось расстояние 136 км. Найдите расстояние между A и B, если все расстояние один может проехать за 10 ч, а другой — за 12 ч.

395. За 5 ч мотоциклист проезжает на 259 км больше, чем велосипедист за 4 ч. За 10 ч велосипедист проезжает на

Рис. 59



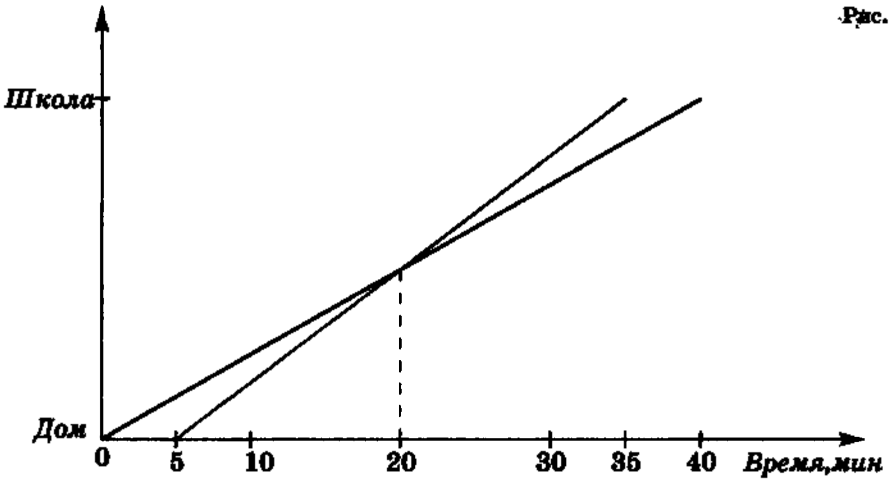


Рис. 60

56 км больше, чем мотоциклист за 2 ч. Определите скорость велосипедиста.

395. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5m = 4v + 259, \\ 10v = 56 + 2m. \end{cases}$$

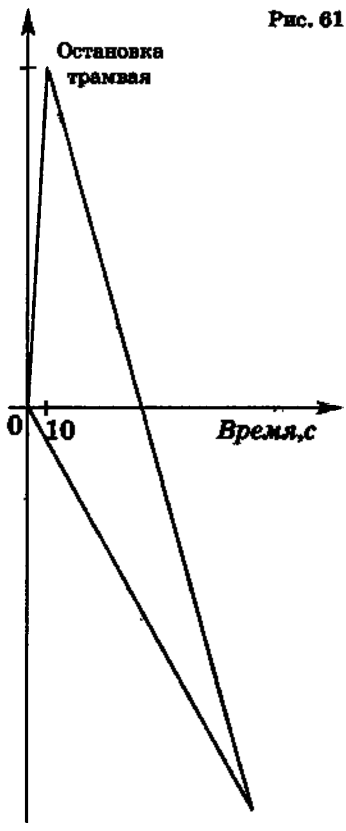
396. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 8 ч. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из A, была больше на 14%, а скорость автомобиля, выехавшего из B, была больше на 15%, то встреча произошла бы через 7 ч. Скорость какого автомобиля больше и во сколько раз?

397. Турист отправился из деревни на железнодорожную станцию. Пройдя за первый час 3 км, он сообразил, что опоздает к поезду на 40 мин. Поэтому остальной путь он проходил со скоростью 4 км/ч и пришел на станцию за 45 мин до отправления поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

УКАЗАНИЕ. Не забудьте согласовать единицы измерения времени (попросту говоря, переведите минуты в часы).

398. Если Аня идет в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она затрачивает полтора часа. Если же она едет на автобусе в оба кон-

Рис. 61



ца, то весь путь у нее занимает тридцать минут. Сколько времени потратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы пойдет пешком?

[redacted] Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и потому прибыл на полчаса раньше. Сколько времени он двигался?

[redacted] Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 мин. Однажды он по дороге в школу вспомнил, что забыл дома ручку. Петя знал, что если он продолжит путь в школу с той же скоростью, то придет туда за 8 мин до звонка, а если вернется домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 мин. Какую часть пути он прошел?

[redacted] Пройдя $\frac{3}{8}$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил автомобиль, приближающийся со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста; если — вперед, то автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает ослик Иа-Иа?

[redacted] Проснувшись, Винни Пух обнаружил, что ходики стоят. Он завел их и отправился в гости к Кролику. (У Кролика были точные часы.) Вернувшись, Пух правильно поставил время. Как ему это удалось?

42. «СОВМЕСТНАЯ ТРАПЕЗА»

[redacted] В озере плавает яблоко: $\frac{2}{3}$ его под водой, а $\frac{1}{3}$ над водой. К нему подплывает рыбка и подлетает птичка, которые одновременно начинают есть, причем птичка ест в 2 раза быстрее, чем рыбка. Кто из них съест больше?

[redacted] Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова — за 3 суток, овца — за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

[redacted] На мельнице имеются три жернова. На первом за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором — 54, а на третьем — 48. Некто хочет смолоть 81 четверть зерна. За какое наименьшее время он сможет это сделать?

406. Малыш съедает 900 г варенья за 9 мин. Карлсон делает это вдвое быстрее. За сколько минут они вместе съедят 1 кг 800 г варенья?

[redacted] Комнату залило, и в ней оказалось 300 ведер воды. Два насоса стали выкачивать воду. Один насос за 2 ч выкачивает 48 ведер, другой — за 6 ч выкачивает 129 ведер. Через сколько часов выкачают всю воду, если ежечасно в комнату с потолка вновь стекает 8 ведер воды?

408. В бак вмещается 60 л воды. К нему проведены две трубы. Через первую трубу за 10 мин можно наполнить пустой бак. Через вторую трубу за 15 мин можно опорожнить полный бак. Сколько воды окажется в баке через 5 мин, если открыть обе трубы?

409. На уборке снега работают две машины. Одна из них может убрать всю улицу за 1 ч, а другая — за 45 мин. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 мин, после чего первая машина сломалась. Сколько надо времени, чтобы вторая машина закончила работу?

410. Через кран вода заполняет бак за 3 ч, а через сливное отверстие вся вода из бака выливается за 5 ч. За какое время вода заполнит бак при открытых кране и отверстии? (Считайте, что скорость вытекания воды из бака не зависит от его наполненности.)

411. За 3,5 ч работы первый штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 ч работы может изготовить 60% всех деталей. Скорость работы третьего пресса на 20% больше скорости второго пресса. За какое время будет выполнен весь заказ при одновременной работе всех трех прессов?

412. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 дней. Если бы сначала первый сделал половину работы, а затем второй другую половину, то вся работа была бы выполнена за 25 дней. За какое время мог выполнить эту работу каждый в отдельности?

413. Трое рабочих копали канаву. Сначала первый рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, для того чтобы вырыть всю канаву, затем второй рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, и, наконец, третий рабочий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое рабочих?

414. Иван, Петр и Кирилл косили траву. Петр и Кирилл скосили бы всю траву вдвое быстрее, чем Иван. Иван и Кирилл скосили бы всю траву втрое быстрее, чем Петр. Во сколько раз быстрее, чем Кирилл, скосили бы всю траву Иван и Петр?

415. Четыре черненьких чумазеньких чертенка чертили черными чернилами чертеж 4 ч. Если бы первый чертенок чертил вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени, а если бы, наоборот, первый чертенок чертил вдвое медленнее, а второй — вдвое быстрее, то они управились бы за 2 ч 40 мин. За какое время начертили бы чертеж первые три чертенка без помощи четвертого?

416. Сулико подошла к роднику с кувшинами вместимостью 5 л и 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико поставила одновременно кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Наполнились кувшины одновременно. Во сколько раз больше воды дает одна струя, чем другая?

417. Коза и корова съедают воз сена за 45 дней, корова и овца — за 60, а овца и коза — за 90. За сколько дней съедят воз сена коза, овца и корова вместе?

43. ПОЛДНЯ АРТЕЛЬ КОСИЛА БОЛЬШОЙ ЛУГ

[redacted] После того как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от установившегося нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

419. Артели косцов предстояло скосить два луга, из которых один вдвое больше другого. Полдня артель косила большой луг, а на вторую половину дня разделилась пополам. Одна половина осталась докашивать большой луг, а другая принялась за малый. К вечеру большой луг скосили, а от малого остался участок, который был скошен за другой день одним косцом. Сколько косцов в артели?

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ. Кроме неизвестного числа косцов x, в этой задаче удобно ввести вспомогательное неизвестное y — размер участка, скашиваемого одним косцом за 1 день. Выразим через x и y площадь большого луга. Луг этот косили полдня x косцов; они скосили $x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$.

Вторую половину дня его косила только половина артели, то есть $\frac{x}{2}$ *косцов; они скосили* $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$. *Поскольку к вечеру был скошен весь луг, площадь его равна*

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Выразим теперь через x и y площадь малого луга. Его полдня косили $\frac{x}{2}$ *косцов и скосили, как мы уже считали, площадь* $\frac{xy}{4}$. *Прибавим недокошенный участок, равный y, и получим площадь малого луга:* $\frac{xy}{4} + y$.

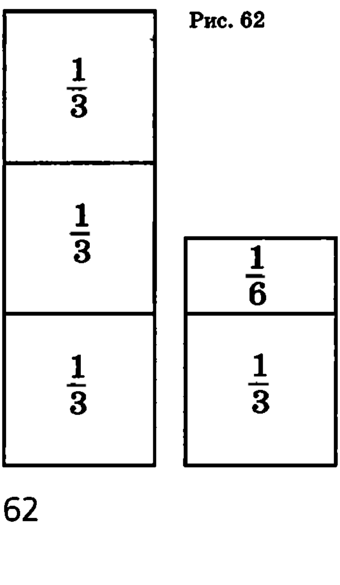


Рис. 62

Осталось перевести на язык алгебры условие о том, что большой луг вдвое больше малого, и уравнение составлено:

$$2 \cdot \left(\frac{xy}{4} + y\right) = \frac{3xy}{4}.$$

Сократим обе части уравнения на y, затем домножим обе части на 4. Получим $2x + 8 = 3x$, откуда $x = 8$.

Ответ: В артели было 8 косцов.

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ этой задачи проще алгебраического. Оно восхищало Л. Н. Толстого, особенно то, что задача становится гораздо прозрачнее, если воспользоваться рисунком 62. Найдите это замечательное решение!

A M T U V W Y	А М П Т Ш
B C D E K	В Е З К С Э Ю
F G J L P Q R	Б Г Д Ё Й Л Р У Ц Ч Щ Ъ Ы Ь Я
H I O X	Ж Н О Ф Х
N S Z	И

Рис. 63

420. Из горячего крана ванна заполняется за 23 мин, из холодного — за 17 мин. Пьер открыл сначала горячий кран. Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

УКАЗАНИЕ. Подсчитайте, какую часть ванны составит горячая вода, а какую — холодная вода. Затем узнайте, сколько всего минут должен быть открыт горячий кран, сколько — холодный.

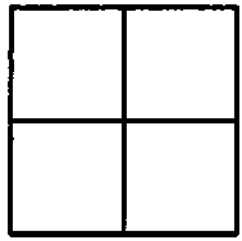


Рис. 64

421. Все буквы латинского алфавита выписаны в пять строк (рис. 63). Справа по тому же правилу выписаны буквы русского алфавита. Угадайте это правило.

422. Нарисуйте замкнутую четырехзвенную ломаную без самопересечений, которая пересекает каждый из 12 отрезков (рис. 64) и не проходит через их концы.

44. РАЗВЕРТКИ МНОГОГРАННИКОВ

Куб (рис. 65) — многогранник. Многогранники мы видим ежедневно: спичечный коробок, книга, комната, многоэтажный панельный дом с плоской крышей — это прямоугольные параллелепипеды; граненый карандаш — призма (впрочем, параллелепипед — это тоже четырехугольная призма). Многие архитектурные сооружения или их части имеют форму пирамиды или усеченной пирамиды — вспомните хотя бы египетские пирамиды!

Многогранник — это часть пространства, ограниченная плоскими многоугольниками — гранями. Стороны и вершины граней называют ребрами и вершинами многогранника. Неформально говоря, о грань можно удариться, о ребро — порезаться, о вершину — уколоться.

Если многогранную поверхность после проведения нескольких разрезов удается развернуть на плоскость, то получается развертка многогранника — плоский многоугольник. Например, на рисунках 66—69 изображены развертки четырех многогранников. Эти многогранники — прямоугольный параллелепипед (рис. 66), правильный тетраэдр (рис. 67), правильная четырехугольная пирамида (рис. 68) и октаэдр (рис. 69).

По разверткам легко восстановить соответствующие многогранники; обычно указывают, какие именно пары сторон нужно склеить для получения исходного многогранника.

423. **Сколько граней, вершин и ребер имеет: а) n-угольная пирамида; б) n-угольная призма? (На рис. 70, *а* — пятиугольная пирамида, на рис. 70, *б* — пятиугольная призма.)**

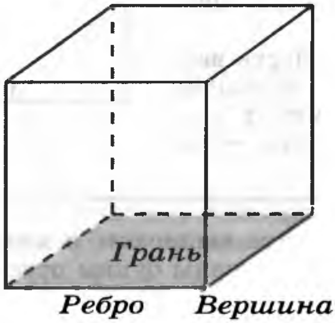


Рис. 65

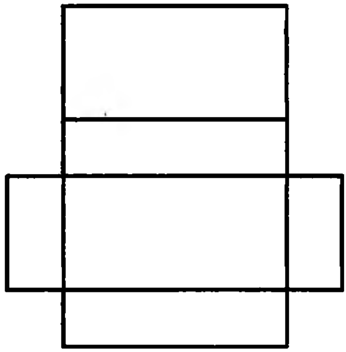


Рис. 66

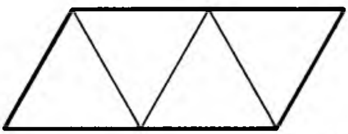


Рис. 67

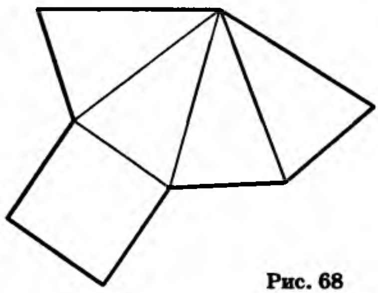


Рис. 68

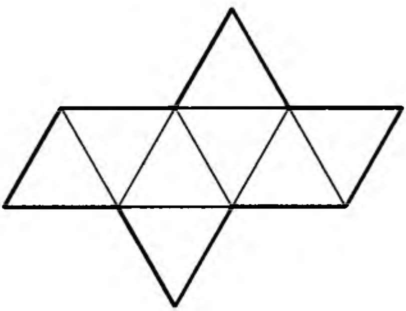


Рис. 69

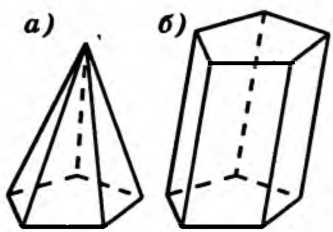


Рис. 70

424. Сколько граней у неочиненного шестигранного карандаша?

В стереометрии[1] для облегчения восприятия условились изображать скрытые от взора наблюдателя линии пунктиром. Например, пирамиду можно изобразить так, как это сделано на рисунке 71, *а*, где все линии видимые, можно — как на рисунке 71, *б*, где есть невидимая (пунктирная) линия, но нельзя так, как это сделано на рисунке 71, *в*.

Даже соблюдая все правила, можно столкнуться с неоднозначностью истолкования плоских изображений пространственных объектов (рис. 72—74).

Многие художники изображали «невозможные объекты», которым не соответствуют никакие реальные пространственные тела, хотя не всегда сразу ясно, в чем дело (рис. 75).

Один и тот же многогранник может иметь несколько разных разверток. Например, правильный тетраэдр имеет, кроме изображенной на рисунке 67, еще развертку треугольной формы (рис. 76), которая даже более удобна для склейки: достаточно согнуть три угловых треугольника. А если резать не только по ребрам, то тот же тетраэдр будет иметь и развертку прямоугольной формы (рис. 77)!

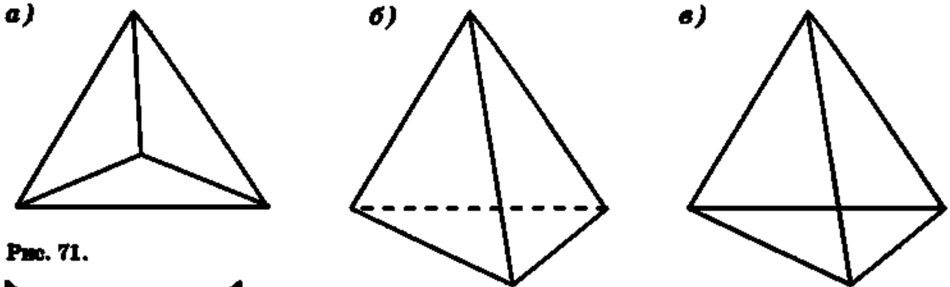


Рис. 71.

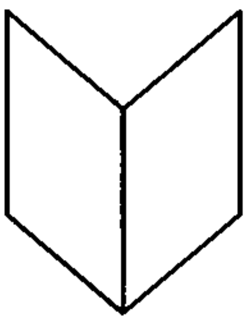


Рис. 72. Фигура Маха

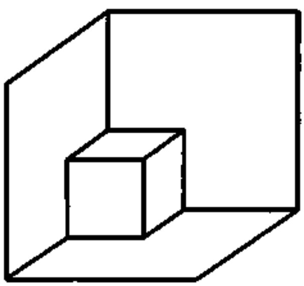


Рис. 73. Что это — маленький куб в углу или большой куб с маленьким вырезом?

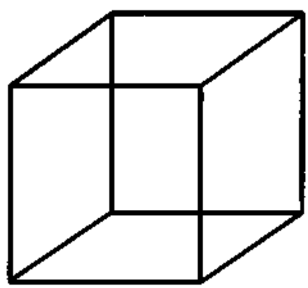


Рис. 74. С какой стороны мы смотрим на этот каркасный куб?

[1] Стереометрия — наука о пространстве, т. е. раздел геометрии, изучающий не плоские (двумерные) фигуры, а пространственные (трехмерные) тела.

Рис. 75

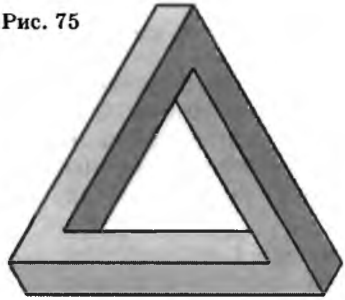


Рис. 76

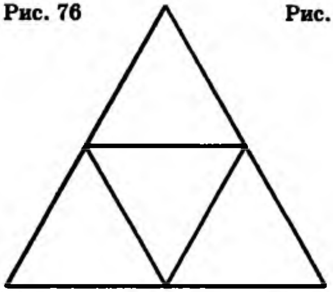
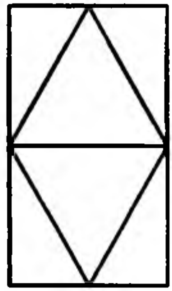


Рис. 77



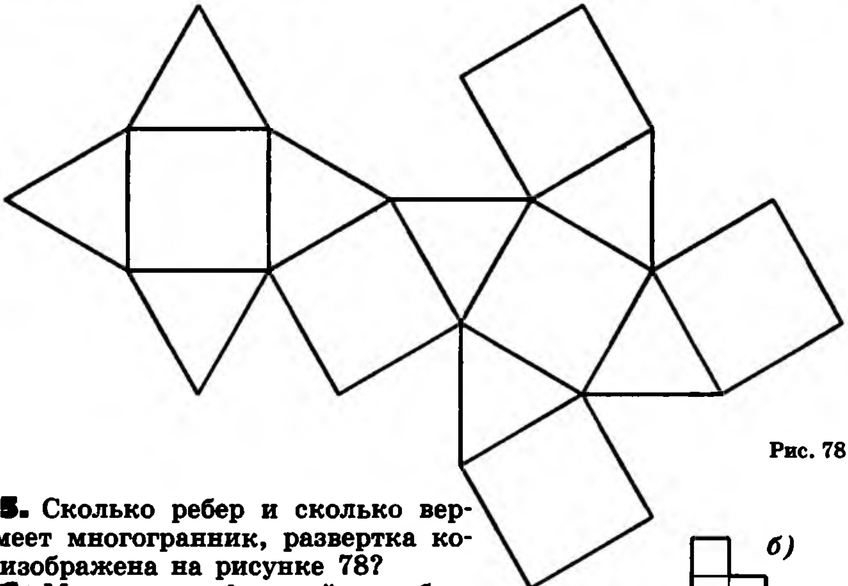


Рис. 78

425. Сколько ребер и сколько вершин имеет многогранник, развертка которого изображена на рисунке 78?

426. Можно ли фигурой, изображенной на рисунке 79, оклеить куб в один слой?

427. Условимся верхнюю грань куба обозначать буквой В, нижнюю — Н, левую — Л, правую — П, заднюю — З, переднюю — Ф (от слова «фасад»). Расставьте на развертках куба (рис. 80) буквы в соответствии с уже намеченными.

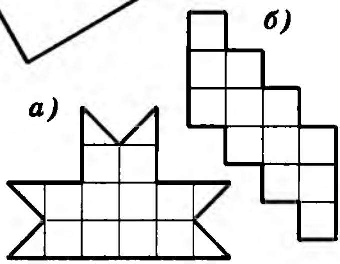


Рис. 79

а) *б)* *в)* *г)*

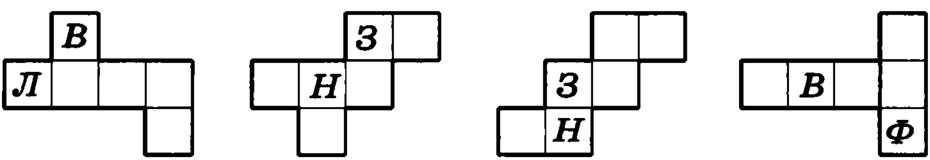


Рис. 80

428. На развертке куба надписаны буквы на гранях (рис. 81). Запишите парами буквы противоположных (т. е. не имеющих общих ребер) граней: (Д ...); (Р ...); (М ...). Какие грани соседствуют с гранью Д?

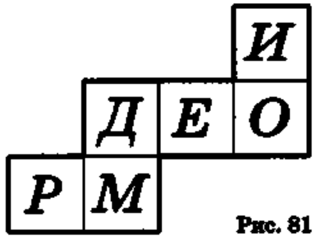


Рис. 81

429. а) Какие из фигур (рис. 82) являются развертками куба? (Разрезы можно проводить только вдоль ребер.)

б)* Нарисуйте 11 разверток куба, которые можно получить, если проводить разрезы только вдоль ребер. (Доказательство того, что других разверток нет, требует определенной усидчивости и ясности ума, но не требует никаких новых идей. Поэтому не тратьте на него время.)

УКАЗАНИЕ. Семь разверток можно найти на рисунке 82. Остальные четыре придумайте самостоятельно.

430. На видимых гранях куба проставлены числа 1, 2 и 3 (рис. 83). А на развертках этого куба (рис. 84) указаны лишь числа 1 и 2. Расставьте на развертках числа 3, 4, 5 и 6 так, чтобы сумма чисел любых двух противоположных граней была равна 7.

431. Для двух кубиков сделали по три развертки и перемешали (рис. 85). Определите, какие три соответствуют одному кубику, а какие три — другому.

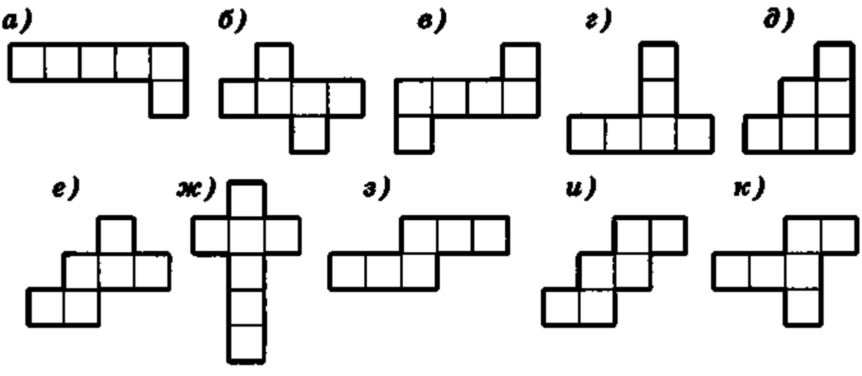


Рис. 82

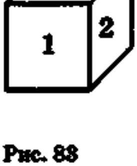


Рис. 83

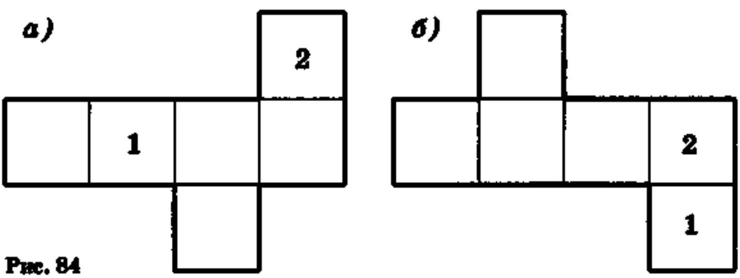


Рис. 84

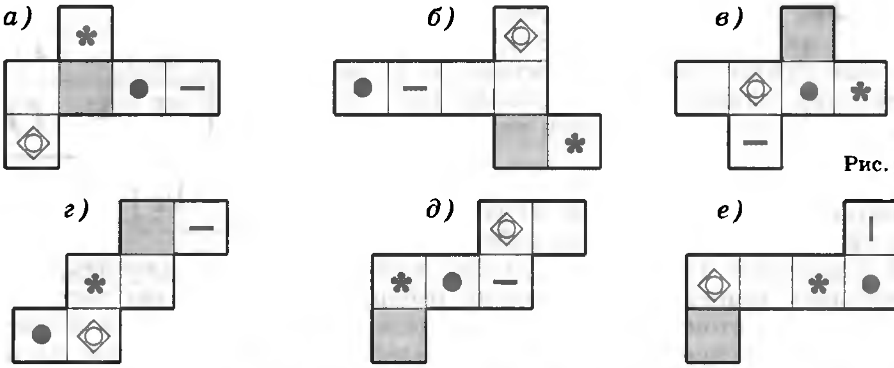


Рис. 85

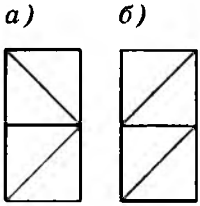


Рис. 86

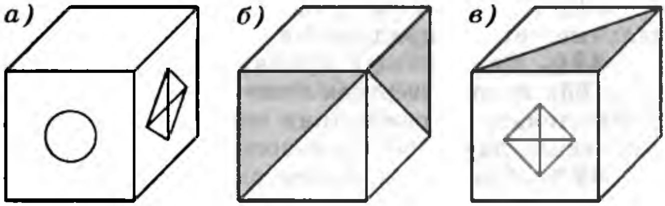


Рис. 87

432. **Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на рисунке 86,*а*. А если смотреть справа, то — как на рисунке 86,*б*. Нарисуйте вид сверху.**

УКАЗАНИЕ. **Нарисуйте аквариум (т. е. параллелепипед $1\times1\times2$) и восстановите траекторию рыбки.**

433. **Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трех различных положениях он выглядел, как на рисунке 87. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развертку.)**

45. ЧЕТНОСТЬ

Я делаю из мухи слона, но муха должна быть настоящей.

Фазиль Искандер

Четные числа — это целые числа, которые делятся на 2 без остатка (например, 2, 4, 6, 8, 10, 0, 18 008, −4, −54). Каждое такое число можно представить в виде $2k$, подобрав подходящее целое k. Например, $4=2\cdot2$, $6=2\cdot3$, $0=2\cdot0$, $-1088=2\cdot(-544)$.

k	-17	-1	0	1	2	3	100
$2k$	-34	-2	0	2	4	6	200
$2k+1$	-33	-1	1	3	5	7	201

Нечетные числа — это те, которые при делении на 2 дают остаток 1 (например, 1, 3, 5, −1, −17). Любое такое число можно записать в виде $2k+1$, подобрав подходящее целое k (например, $3=2\cdot1+1$, $5=2\cdot2+1$). Имеется очень простой признак делимости: число делится на 2 в том и только в том случае, когда его последняя цифра[1] (разряд единиц) есть 0, 2, 4, 6 или 8.

434. а) Представьте в виде $2n+1$ числа 1101, 1543, −1101 и −1543.
б) Можно ли представить число 1543 в виде $2n-1$?

Мы будем использовать следующие свойства:
- сумма четных чисел четна;
- сумма четного и нечетного чисел нечетна;
- сумма двух нечетных чисел четна.

+	Четное	Нечетное
Четное	Ч	Н
Нечетное	Н	Ч

Докажем, например, последнее из них. Пусть одно число есть $2a+1$, другое $2b+1$. Тогда сумма $(2a+1)+(2b+1)=$
$=2\cdot(a+b+1)$ — четное число.

435. Произведение любых двух нечетных чисел нечетно. Докажите это.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По таблице умножения проверяем, что произведение любых двух нечетных цифр оканчивается на нечетную цифру.

---

[1] ***Для Премудрой Совы.*** **Мы рассматриваем десятичную систему счисления. В других системах признаки делимости тоже существуют, но формулируются иначе. Например, если пользоваться троичной системой счисления, то число делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 2.**

Вообще-то все правильно. Но решение некрасивое. Почему? Во-первых, это не теоретическое рассуждение, а скучная проверка – перебор. Во-вторых, важно не только формально доказать, но и понять суть явления.
Для этого нужно придумать рассуждение, которое можно использовать при решении других задач (например, при изучении делимости не на 2, а на 3). Вот это рассуждение:

$$(2a+1)(2b+1)=4ab+2a+2b+1=2\cdot(2ab+a+b)+1.$$

×	Четное	Нечетное
Четное	Ч	Ч
Нечетное	Ч	Н

436. а) Произведение четного числа и любого целого числа четно. Докажите это.
б) Четов пишет на доске одно целое число, а Нечетов — другое. Если их произведение четно, то победителем объявляется Четов, если — нечетно, то Нечетов. Может ли один из них играть так, чтобы непременно выиграть?

437. Если сумма двух целых чисел нечетна, то произведение этих чисел четно. Докажите это.

438. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45 045?

439. Николай с сыном и Петр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Петр — втрое больше, чем его сын. Всего поймали 25 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. Многие рассуждают так: если Николай и его сын поймали по x рыб, то вместе они поймали $x+x=2x$ рыб. Если сын Петра поймал y рыб, то Петр поймал $3y$ рыб, так что Петр с сыном вместе поймали $y+3y=4y$ рыб. Поскольку числа $2x$ и $4y$ четные, а число 25 нечетное, получаем противоречие.

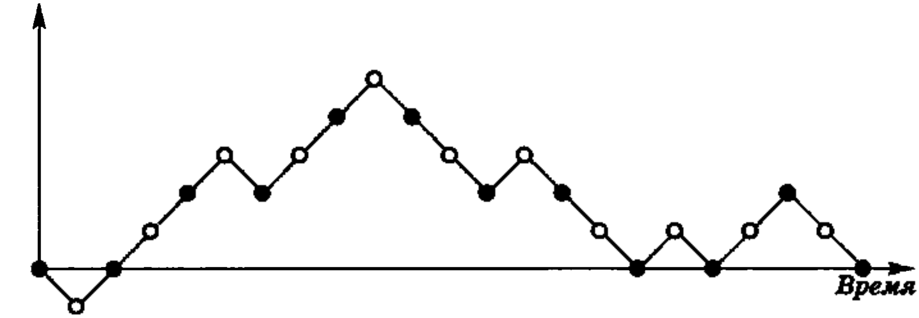
Тем не менее ошибки в условии нет. Такая рыбалка могла состояться! (Вспомните задачу 41.)

440. Можно ли разменять 25 р. десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей?

441. Можно ли так подобрать целые числа a и b, чтобы выполнялось равенство $7a+5b=111$, а сумма $a+b$ была четна?

442. Парламент состоит из двух одинаковых палат. В голосовании участвовали все депутаты, причем воздержавшихся не было. Когда объявили, что решение принято с преимуществом в 28 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования фальсифицированы. Как он это понял?

Рис. 88



443. Кузнечик, прыгая вдоль прямой вперед и назад, вернулся в исходную точку. Зная, что длины всех прыжков одинаковы, докажите, что число их четно.

УКАЗАНИЕ. Посмотрите на рисунок 88.

444. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

ПОДСКАЗКА ДЛЯ ПРЕМУДРОЙ СОВЫ. Мы уже видели, что отрицательные числа тоже бывают четными и нечетными: числа 0, −2, −4, ... четны, а числа −1, −3, −5, ... нечетны. Знак («+» или «−») не влияет на то, четное число или нечетное. Сложите числа 1+2+...+10 (или посчитайте, сколько среди чисел от 1 до 10 нечетных чисел) — и все станет понятно.

445. В одну строку выписаны подряд числа 1, 2, 3, ..., 1984. Можно ли так расставить знаки «+» и «−» между ними, чтобы в результате получилось число 1985?

446. Рассмотрим первые 50 натуральных чисел. Докажите, что сумма никаких 36 из них не равна сумме 14 других.

447. На доске написано в строку 1993 целых числа. Докажите, что можно стереть одно из них так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 1992 целых чисел?

448. На главной диагонали доски 10×10 стоит 10 шашек (все в разных клетках). За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь доски?

449. После представления «Ревизора» состоялся диалог:
Бобчинский: «Это Вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами так говорили!»
Добчинский: «Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали «Э!». А у меня зуб во рту со свистом!»
Бобчинский: «Что я первый семгу заказал, верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. А все-таки это Вы первый сказали «Э!».

Кто первый сказал «Э!», если из девяти произнесенных фраз-утверждений четное число верных?

450. В забеге участвовали 3 бегуна: Иванов, Петров и Сидоров. Перед забегом 4 болельщика дали такие 4 прогноза:
- Победит Иванов.
- Сидоров обгонит Петрова.
- Петров финиширует следующим после Иванова.
- Сидоров не победит.

После забега оказалось, что среди прогнозов было четное число верных. В каком порядке финишировали бегуны?

46. ЧЕРЕДОВАНИЕ

451. По кругу зацеплены 9 шестеренок: первая со второй, вторая с третьей, ..., девятая с первой (рис. 89). Могут ли они вращаться?

452. Пожалованный землей за великие дела Мюнхгаузен нарисовал свой замок, ближние деревни и границы своих владений. Королевский картограф заверил рисунок. Во время бунта рисунок подожгли, но барон спас кусочек (рис. 90). В суде жители отмеченной на нем деревни утверждают, что живут не на земле барона. Он не согласен. Кто прав?

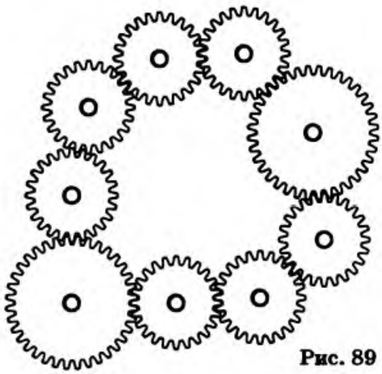


Рис. 89

Рис. 90

453. На рисунке 91 прямая пересекает все стороны 6-угольника. Может ли прямая пересекать все стороны 11-угольника, не проходя ни через одну его вершину?

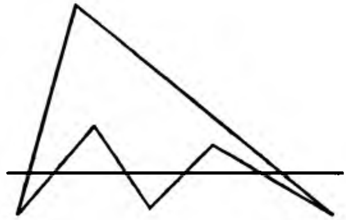


Рис. 91

454. а) Конь вышел с некоторого поля шахматной доски и через несколько ходов вернулся на это поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.
б) Из шахматной доски выпилили одно угловое поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?

455. Мог ли конь пройти из левого нижнего угла шахматной доски (размером 8×8) в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

456. Фишка стоит в левом нижнем углу доски размером 4×4. За один ход она может передвинуться на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каких клеток доски она может достичь, побывав предварительно ровно по одному разу на каждой из остальных клеток? (На рисунке 92 показано, как она может достичь левого верхнего угла.)

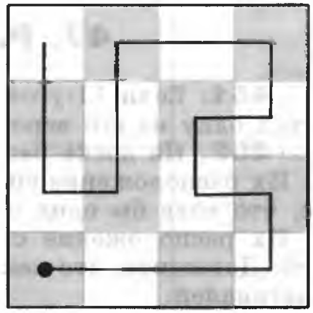


Рис. 92

457. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней (рис. 93). Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

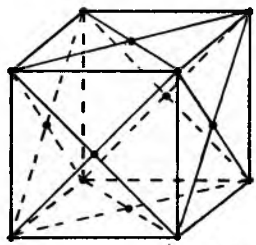


Рис. 93

458. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика[1]? А если бы куб имел размеры 13×13×13?

459. а) Обойдите доску (рис. 94), побывав на каждой клетке ровно один раз. (Переходить с клетки на клетку можно только через отрезочек, а не через

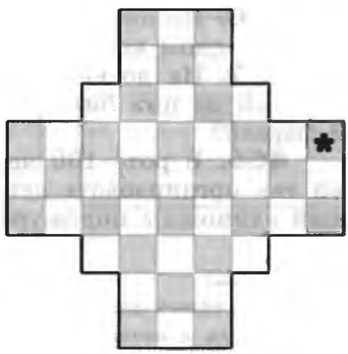


Рис. 94

[1] Именно там, в центральном кубике, спрятан крючок мышеловки.

угол. Возвращаться на исходную клетку не обязательно.)

б) Можно ли сделать это, начав с отмеченной клетки?

* **460.** Схема городов и дорог некоторого государства изображена на рисунке 95. Можно ли обойти все города, побывав в каждом из них по одному разу?

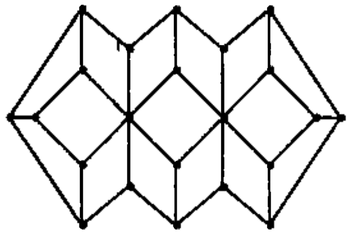


Рис. 95

47. РАЗБИЕНИЕ НА ПАРЫ

461. Если 11-угольник имеет ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин. Докажите это.

462. На доске размером 17×17 стоят 11 пешек.

а) Их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что хотя бы одна пешка стоит на ней.

б) Их расположение симметрично относительно главных[1] диагоналей. Докажите, что какие-нибудь три пешки стоят на одной из этих диагоналей.

463. а) Может ли 11-звенная ломаная пересекать каждое свое звено ровно один раз?

б) Нарисуйте замкнутую 6-звенную ломаную, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз.

в) Из скольких звеньев может состоять ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно один раз?

ПОЯСНЕНИЕ. Ломаная получается, если, не отрывая руку от бумаги, проводить отрезки. *Замкнутой* называют линию, начало которой совпадает с концом. Пятиугольная звезда (рис. 96, *а*) – пример замкнутой ломаной. К сожалению, она пересекает каждое свое звено дважды. Два ромба (рис. 96,*б*) дают пример системы отрезков, каждый из которых пересечен другим отрезком один раз. Впрочем, два ромба – это не одна, а две замкнутые ломаные.

464. По окончании игры все кости домино выложены в цепочку. На одном конце — пятерка. Что на другом?

465. На доске размером 6×6 расставьте 8 ферзей так, чтобы каждый из них бил ровно одного ферзя. Можно ли так расставить 9 ферзей?

466. В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый единожды подежурил с каждым?

---

[1] Т. е. самых длинных. (Таковых две. На доске размером $n\times n$ они имеют общую клетку, если n нечетно, и не имеют общих клеток, если n четно. Поэтому расположить нечетное число пешек симметрично относительно обеих главных диагоналей на доске $n\times n$ можно только при нечетном n.)

467. При каких n ладья может обойти все клетки доски $n \times n$, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, не побывав ни в какой клетке дважды?

468. а) Докажите, что выпуклый 77-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.[1]
б) Существует ли 7-угольник, который можно разрезать на параллелограммы?

469. На плоскости симметрично относительно некоторых двух прямых расположены 11 точек (пример такого расположения — на рисунке 97). Обязана ли одна из этих точек быть точкой пересечения прямых?

УКАЗАНИЕ. Прямые необязательно перпендикулярны. Лучше начать решение с более простого случая — 3 точек. Затем разберите случай с 5 точками. После этого не составит труда решить задачу для 11 точек.

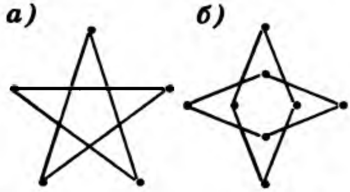


Рис. 96

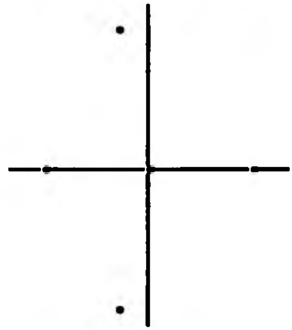


Рис. 97

48. РАСКРАСКИ

470. Можно ли разбить на доминошки (каждая — из двух клеток) шахматную доску без противоположных углов a1 и h8 (рис. 98)?

471. Можно ли из пяти фигур рисунка 99 сложить прямоугольник размером 4×5?

472. Замок имеет вид прямоугольника размером 5×7 клеток. Каждая клетка, кроме центральной,— комната замка, а в центральной клетке находится бассейн (рис. 100). В каждой стене (стороне

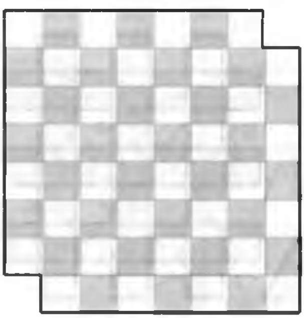


Рис. 98

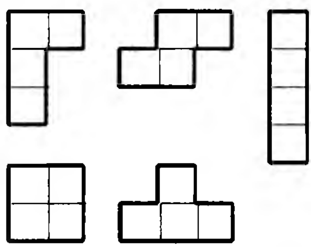


Рис. 99

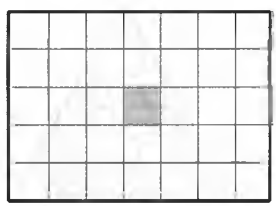


Рис. 100

[1] Не забудьте, к одной стороне многоугольника могут примыкать несколько параллелограммов.

клетки), разделяющей две соседние комнаты, есть дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

473. Докажите, что доску размером 50×50 нельзя разрезать на фигуры из четырех клеток в форме буквы «Т».

474. Треугольный замок разделен на 100 одинаковых треугольных залов. В середине каждой стены между залами сделана дверь. Сколько залов сможет осмотреть человек, не желающий нигде побывать более одного раза? (На рисунке 101 показано, как можно осмотреть 91 зал. Можно ли больше?)

475. Какое наибольшее количество ромбов, каждый из которых составлен из двух равносторонних треугольников со стороной 1 (рис. 102, *а*), можно вырезать из равностороннего треугольника со стороной 5 (рис. 102, *б*)? (Для простоты считайте, что резать можно только по сторонам треугольников.)

* **476.** На какое наименьшее число прямоугольников можно разрезать фигуру (рис. 103)? (Режьте только по границам клеток.)

477. Двадцать пять жуков сидели по-одному на клетках доски 5×5. Каждый перелетел на соседнюю[1] клетку. Докажите, что хотя бы одна клетка осталась свободной (т. е. хотя бы на одну клетку прилетели 2 жука или более).

478. Через клетчатый квадрат 100×100 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в синий и красный цвета. Докажите, что количество синих клеточек четно.

479. Можно ли шахматную доску разрезать на 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

480. Шахматную доску покрыли костями домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костей покрывают восемь клеток одной из диагоналей доски; при этом одни из них покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие — еще одну клетку ниже диагонали. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других костей поровну.

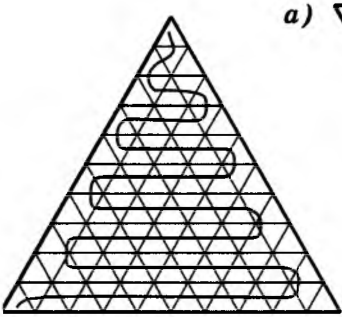


Рис. 101

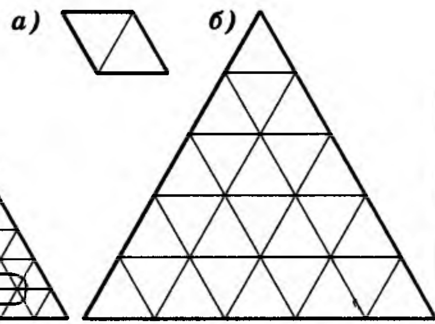


Рис. 102

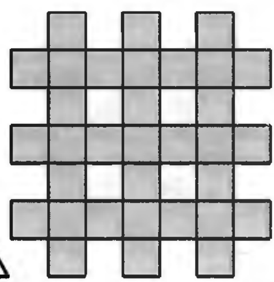


Рис. 103

[1] Соседними называем клетки, имеющие общую сторону.

49. ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ

481. Можно ли, не отрывая карандаш от бумаги и не проведя никакой линии более одного раза, нарисовать: а) открытый конверт (рис. 104, *а*); б) закрытый конверт (рис. 104, *б*)?

482. Нарисуйте одним росчерком, не проведя ни одной линии дважды, фигуры (рис. 105).

483. Выскочив из норы *A*, заяц побегал по снегу, оставляя след, и спрятался под одним из деревьев (рис. 106). Под каким?

484. *(Задача Эйлера о мостах Кенигсберга.)* Можно ли, гуляя по городу, пройти по каждому мосту (рис. 107) ровно один раз?

485. а) Не ломая, из куска проволоки длиной 120 см нельзя сделать каркас куба с ребром 10 см. Докажите это.
б) Найдите минимальную длину куска проволоки, из которой, не ломая ее, можно сделать каркас куба с ребром 10 см. (Вдоль части ребер проволока пройдет несколько раз.)

486. Линия, проведенная на рисунке 108, *а*, пересекает 13 из 16 отрезков данной фигуры. Можно ли провести линию, которая по одному разу пересекает все отрезки: а) этой фигуры; б) фигуры, изображенной на рисунке 108, *б*?

◄ Рис. 104

а)

б)

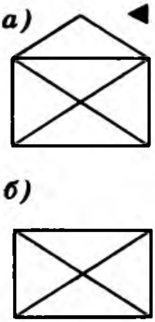
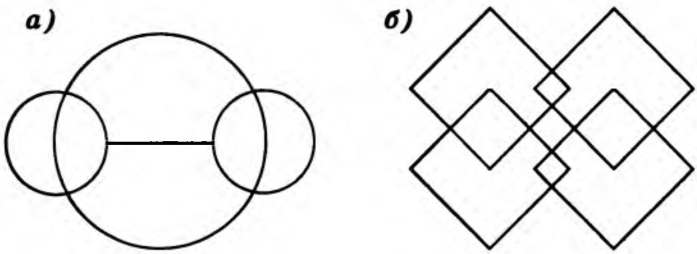


Рис. 105



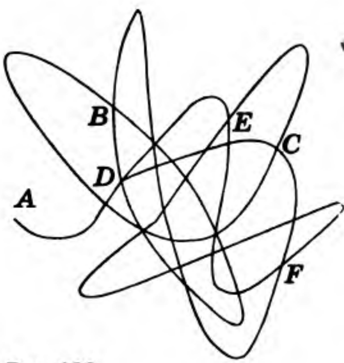


Рис. 106

Рис. 107

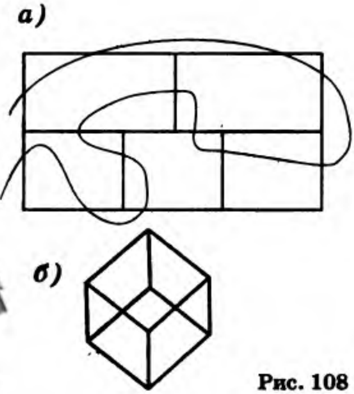


Рис. 108

* **487.** а) Можно ли пометить вершины правильного 45-угольника цифрами 0, 1, ..., 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой помечены этими цифрами?
б) При каких n можно пометить вершины правильного $\frac{n(n+1)}{2}$-угольника числами от 1 до n так, чтобы для каждой пары различных натуральных чисел, не превосходящих n, нашлась сторона, концы которой помечены этими числами?

488. Сто фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

50. ИНВАРИАНТЫ

В следующих задачах решение состоит в предъявлении некоторой величины, четность которой или вовсе не меняется, или меняется известным нам способом.

489. На столе лежат две монеты. Петя закрывает глаза, а Витя переворачивает монеты (по одной), говоря при каждом переворачивании «Хоп!» (он может переворачивать одну монету несколько раз, не забывая всякий раз сказать «Хоп!»). После этого Витя накрывает одну из монет рукой, а Петя открывает глаза и отгадывает, как лежит невидимая монета — гербом вверх или вниз. Как Петя это делает? А если монет не две, а двадцать две?

490. а) На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Разрешено переворачивать одновременно любые два стакана. Можно ли поставить все стаканы дном вниз?
б) 30 пятаков лежат гербом вверх. Разрешено за раз перевернуть любые 29 из них. Можно ли добиться, чтобы все пятаки легли гербом вниз?

491. Круг разбит на 6 секторов. В секторах стоят 6 шашек, по одной в каждом. За один ход разрешается передвинуть 2 шашки, на один сектор каждую (в одинаковых или противоположных направлениях). Можно ли за несколько ходов собрать все шашки в одном секторе?

491. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве. А если чижей и деревьев n?

492. Каждая из расположенных по кругу 12 ламп может находиться в одном из двух состояний: гореть или не гореть. За один ход можно изменить состояние любых трех ламп, расположенных подряд. Вначале горит только одна лампа. Можно ли добиться того, чтобы горели все 12 ламп?

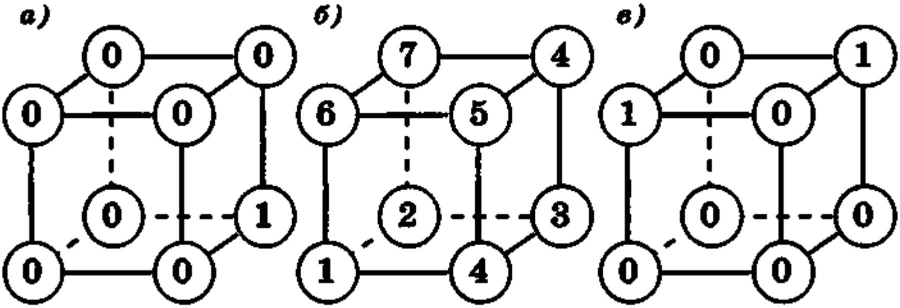


Рис. 109

493. В каждой вершине куба записано число (рис. 109). За один шаг разрешено к двум числам, расположенным на одном ребре, прибавить по единице. Можно ли добиться, чтобы все числа в вершинах стали одинаковыми?

494. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешено к любым двум из них прибавить по единице. Можно ли за несколько шагов уравнять эти числа?

51. ПОДСЧЕТ ДВУМЯ СПОСОБАМИ

Что в лоб, что по лбу.

495. В конференции участвовали 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли случиться так, что каждый участник получил ровно 3 письма? (Письма на почте не теряют!)

УКАЗАНИЕ. Количество отправленных писем четно. Если бы каждый получил по 3 письма, то количество полученных писем равнялось бы $19 \cdot 3 = 57$.

496. Несколько шестиклассников и семиклассников обменялись рукопожатиями. При этом каждый шестиклассник пожал руку семи семиклассникам, а каждый семиклассник — шести шестиклассникам. Кого среди них было больше — шестиклассников или семиклассников?

496. В стране Карабабасии живут карабасы и барабасы. Каждый карабас дружит с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас дружит с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше — карабасов или барабасов?

497. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми (рис. 110). Сколько лоскутов белого цвета?

497. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=32, \\ 3x=5y. \end{cases}$$

Рис. 110

498. Взяли несколько одинаковых правильных треугольников. Вершины каждого из них пометили цифрами 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться, что сумма чисел, находящихся в каждом углу, равна 55?

499. Куб $3\times3\times3$ составлен из 14 белых и 13 черных кубиков. Столбик — это три кубика, стоящие подряд вдоль одного направления: ширины, длины или высоты. Может ли быть так, что в каждом столбике нечетное количество: а) белых кубиков; б) черных кубиков?

500. У марсиан бывает не только 2, 1 или 0 рук, как у людей, а любое число. Однажды все марсиане взялись за руки. Свободных рук не осталось. Докажите, что число нечетноруких марсиан четно.

501. У царя Никиты было 45 сыновей. Он завещал им разделить между собой царство таким образом, чтобы земли каждого из них граничили с землями ровно 3 или 7 его братьев. Призадумались братья. Смогут ли они выполнить волю отца?

502. Не существует выпуклого многогранника, у которого число граней нечетно, а каждая грань имеет нечетное число вершин. Докажите это.

503. Существует ли 1989-звенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно 3 раза?

504. Квадрат разрезали на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не оказалась вершиной сразу четырех прямоугольников. Докажите, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольников, четно.

505. В некоей стране некие города связаны авиалиниями (с двусторонним движением). Из столицы выходит 1981 авиалиния, из города Дальний — 1 авиалиния, а из остальных городов — по 20 авиалиний. Докажите, что из столицы можно долететь до Дальнего (возможно, с пересадками).

506. По окончании конкурса бальных танцев[1] участники (в беспорядке, мальчики и девочки) назвали число своих выступлений: 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Не ошибся ли кто-нибудь?

---

[1] В каждом танце участвовало несколько пар, от танца к танцу пары могли перемешиваться, в некоторых танцах некоторые могли и не участвовать, отдыхая. Число мальчиков не обязано совпадать с числом девочек.

РЕШЕНИЕ: Сумма чисел, названных всеми мальчиками, равна числу выступлений и потому должна совпадать с суммой чисел, названных девочками. Но все числа, кроме одного, делятся на 3.

507. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур? (Угловая клетка также считается диагональю доски.)

508. На шахматной доске 9×9 расставлены 9 ладей, не бьющих друг друга. Каждую из этих ладей передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

* **509.** Даны 20 карточек, на которых написано по одной цифре (0, 1, 2, ..., 9), причем каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две и так до девяток, между которыми должно лежать девять карточек?

52. СУММА И СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ

Какая сегодня средняя температура по больнице? — спросил ревизор главврача.

510. Два человека отправились на рынок продавать яблоки. У них было по 30 яблок. Один собирался продавать 2 яблока за 1 р., а другой — 3 яблока за 1 р. Перед началом торговли одного из них вызвали домой, и он попросил другого продавца продать его яблоки. Тот стал продавать 5 яблок за 2 р. Если бы они торговали порознь, то выручили бы 10 р. и 15 р., а продавая 5 яблок за 2 р., получили 24 р. Куда исчез рубль?

511. В магазине есть на равную сумму конфеты стоимостью 2 р. за килограмм и стоимостью 3 р. за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет?

512. Разбейте {1, 2, 9, 25, 49, 64} на две группы, чтобы сумма чисел одной группы была равна сумме чисел другой.

513. Разделите полоску (рис. 111) на 4 одинаковые части, чтобы все части имели одну и ту же сумму входящих в них чисел.

514. Когда Миша поступал в МГУ, учитывался средний балл аттестата о среднем образовании по двенадцати предметам. У Миши средний балл 3,5. По скольким предметам ему нужно было повысить оценку на один балл, чтобы средний балл оказался 4?

1	9	16	7	12	5	4	3
18	15	10	2	13	6	11	14

Рис. 111

515. Средний возраст 11 игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся игроков — 21 год. Сколько лет получившему травму игроку?

---

516. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весит Аня?

517. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого купца, то соберут 90 р., без второго — 85 р., без третьего — 80 р., без четвертого — 75 р. Сколько у кого денег?

517. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y+z+t=90, \\ x+z+t=85, \\ x+y+t=80, \\ x+y+z=75. \end{cases}$$

518. а) На каждой стороне шестиугольника написали по числу. Сумму чисел каждых двух соседних сторон записали в общую вершину этих сторон. Затем стерли все числа на сторонах и одно число в вершине (рис. 112). Можно ли восстановить число в вершине?
б) В вершинах треугольника записали три числа. После этого на каждой стороне написали сумму чисел в ее концах. Получились числа 1990, 1991 и 1992. Какие числа были в вершинах?

519. Катя, Лена, Маша, Нина участвовали в концерте. Каждую песню пели 3 девочки. Катя пела 8 песен — больше всех; Нина пела 5 песен — меньше всех. Сколько песен было спето?

520. Имеется 13 чисел, равных 1,1, и 15 чисел, равных 1,11. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы сумма чисел одной группы была равна сумме чисел другой группы?

521. На доске написано несколько ненулевых чисел. Каждое из них равно полусумме остальных. Сколько чисел на доске?

522. Штирлиц передал в Центр вместо чисел a, b, c и d числа $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$ и $b+d$, не указав даже, в каком порядке они переданы. В Центре получили числа 13, 15, 16, 20 и 22. Чему равна сумма $c+d$?

523. В соревнованиях по стрельбе участвовало 30 человек. Первый стрелок выбил 80 очков, второй — 60 очков, третий выбил среднее арифметическое чисел очков первых двух, четвертый — среднее арифметическое чисел очков первых трех. И вообще, каждый следующий выбивал среднее арифметическое чисел очков, выбитых всеми предыдущими стрелками. Сколько очков выбил последний стрелок?

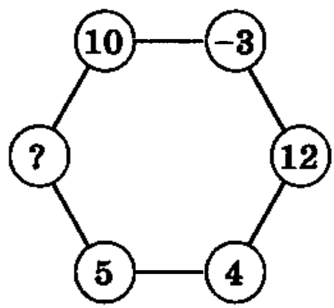


Рис. 112

524. В вершинах куба записано по натуральному числу. В середине каждого ребра записана сумма чисел, находящихся на концах этого ребра, а в центре каждой грани — сумма чисел, находящихся в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 26 чисел равняться 1992?

525. Можно ли натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу из 5 строк и 6 столбцов так, чтобы все шесть сумм чисел, стоящих в столбцах, были равны?

526. Можно ли заполнить числами таблицу размером 5×5 так, чтобы произведение всех чисел любой строки было отрицательно, а произведение всех чисел любого столбца — положительно? А таблицу размером 6×6?

526. Можно ли расставить числа в таблице так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительна, а в каждом столбце — отрицательна?

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите сумму всех чисел таблицы по строкам и по столбцам.

---

527. Расставьте в кружочках на рисунке 113 числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы суммы всех пяти троек чисел, расположенных «на отрезках», были равны между собой.

УКАЗАНИЕ. Обозначьте число, стоящее в верхнем кружочке, через x, а сумму тройки чисел на каждом «отрезке» через s. Сумма этих сумм по трем «отрезкам», выходящим из верхнего кружка, равна $3s$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по одному разу, кроме числа x, которое входит три раза. Отсюда

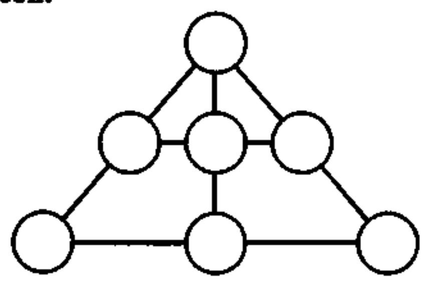


Рис. 113

$$3s=1+2+3+4+5+6+7+2x,$$

т. е. $3s=28+2x$. Если же мы сложим числа лишь по двум горизонтальным «отрезкам», то получим сумму шести чисел из семи, то есть $1+2+3+4+5+6+7-x$. Следовательно,

$$2s=28-x,$$

откуда $x=28-2s$. Подставив это значение в первое уравнение, получим $3s=28+2(28-2s)$, откуда $s=12$ и $x=28-2s=4$.

528. Можно ли по кругу расставить 7 целых чисел так, чтобы сумма любых трех соседних равнялась 19?

529. Мюнхгаузен расставил на ребрах куба числа 1, 2, 3, ..., 12. Затем на каждой грани куба он написал сумму чисел, стоящих на ее сторонах. Могли ли на всех гранях оказаться одинаковые суммы?

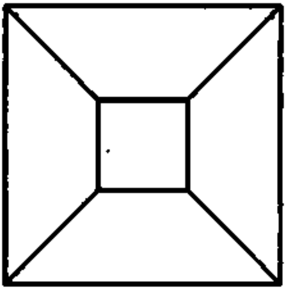


Рис. 114

?				20
			14	10
		32	28	
	35	40		
9	21			

Рис. 115

УКАЗАНИЕ. Если сложить все суммы, то получится равенство

$$6s = 2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12),$$

где s — число, которое Мюнхгаузен написал на всех гранях. Пользуясь известным приемом, можно быстро подсчитать правую часть полученного равенства:

$$6s = (1+12)+(2+11)+(3+10)+(4+9)+(5+8)+(6+7)+(7+6)+$$
$$+(8+5)+(9+4)+(10+3)+(11+2)+(12+1),$$
$$6s = 12\cdot 13,$$

откуда $s=26$. Значит, надо стараться, чтобы суммы чисел на гранях были равны 26. Сделайте это! (Советую при решении этой задачи рисовать куб так, как на рисунке 114.)

530. Расставьте числа 1, 2, ... , 8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани были равны между собой.

531. Расставьте по кругу 6 различных чисел, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

---

532. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{12}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=9z, \\ yz=100x, \\ xz=4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=1{,}5, \\ \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=0{,}7, \\ \dfrac{1}{z+x}+\dfrac{1}{x+y}=1{,}2. \end{cases}$

533. Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Площади некоторых из них указаны на рисунке 115. Найдите площадь прямоугольника, отмеченного вопросительным знаком.

534. За 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии — 21 динар, за 5 крон — 2 талера, а за 10 рупий — 3 талера. Сколько тугриков можно выручить за 13 крон?

УКАЗАНИЕ. Отношение стоимости тугрика к стоимости динара 14:11, динара к рупии 22:21, рупии к талеру 3:10, талера к кроне 5:2. Перемножьте эти дроби.

53. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

535. Метрострой нанял двух кротов для рытья туннеля. Один из них копает быстрее другого, а едят они одинаково. Что выгоднее (в смысле затрат продуктов): копать с двух сторон до встречи или копать каждому половину туннеля?[1]

536. Автомобиль первую половину пути ехал со скоростью 50 км/ч, а вторую половину — со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость?[2]

537. Два путника одновременно вышли из пункта *A* в пункт *B*. Первый одну половину расстояния шел со скоростью 5 км/ч, а другую половину — со скоростью 4 км/ч. А второй путник одну половину времени, затраченного им на переход, проходил по 5 км в час, а другую половину времени — по 4 км в час. Кто из них раньше пришел в пункт *B*?

ПОЯСНЕНИЕ. Пусть расстояние между пунктами *A* и *B* равно 1000 км, а скорости (вместо данных в задаче 5 км/ч и 4 км/ч) равны 1000 км/ч и 1 км/ч.

Тогда первый путник, мчавшийся одну половину расстояния со скоростью 1000 км/ч, а другую половину шедший со скоростью 1 км/ч, потратил $\frac{1}{2}+500$ часов.

Второй путник, который одну половину времени двигался со скоростью 1000 км/ч, а другую половину времени – со скоростью 1 км/ч, потратил менее 2 часов.

538. Белка за 20 минут приносит орех в гнездо. Далеко ли орешник от гнезда, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом — 3 м/с?

539. Сначала самолет летел со скоростью 180 км/ч, а когда ему осталось лететь на 320 км меньше, чем он пролетел, он увеличил скорость до 250 км/ч. Оказалось, что средняя скорость самолета на всем пути 200 км/ч. Сколько времени длился полет?

540. Пешеход шел 3,5 ч, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

541. На дороге, соединяющей два аула, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а под гору — 30 км/ч. Найдите расстояние между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 4 ч без остановок.

542. Дорога между городами *A* и *B* состоит только из подъемов и спусков. Расстояние между *A* и *B* равно 160 км. Найдите среднюю скорость автобуса, проехавшего из *A* в *B* и обратно, если его скорость на подъеме равна 40 км/ч, а скорость на спуске —

[1] Кто не работает, тот не ест!

[2] *Средняя скорость* — это отношение всего пройденного пути ко всему затраченному времени.

80 км/ч. Зависит ли значение средней скорости от расстояния между городами?

543. Путешественник вышел из гостиницы в 3 часа дня и возвратился в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он шел со скоростью 4 км/ч, в гору — 3 км/ч, под гору — 6 км/ч. Найдите расстояние, которое прошел путешественник, если он нигде не останавливался.

---

544. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля со скоростью 30 км/ч. Одновременно из A вылетел со скоростью 70 км/ч неутомимый шмель. Встретив автомобиль, выехавший из B, он сразу полетел обратно к A. Повстречав автомобиль, выехавший из A, он полетел обратно к B и так летал, пока машины не встретились. Какое расстояние пролетел шмель, если между городами A и B 300 км?[1]

545. Первый путешественник был на 3 км впереди второго и шел со скоростью 4 км/ч, второй — со скоростью 5 км/ч. Собака побежала со скоростью 15 км/ч от одного из них к другому, затем вернулась... Так она бегала, пока они не встретились. Сколько километров пробежала собака?

54. ВКЛЮЧЕНИЯ — ИСКЛЮЧЕНИЯ

> Человек, впервые сформулировавший, что «два и два четыре» — великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками.
> Все дальнейшие люди, хотя бы они складывали неизмеримо бóльшие вещи, например паровоз с паровозом,— не математики.
>
> В. В. Маяковский

546. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

547. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

548. Сколько детей в семье, если 7 из них любят капусту, 6 — морковь, 5 — горох, 4 — капусту и морковь, 3 — капусту и горох, 2 — морковь и горох, а 1 любит и капусту, и горох, и морковь?

---

[1] Знайка почти мгновенно ответил на этот вопрос, а на изумленное: «Как можно было так быстро все посчитать?» — пошутил: «Конечно же я просуммировал геометрическую прогрессию!»

549. Каждый из трех игроков записывает 100 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычеркивают из всех списков. Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 61 слово, у второго — 80 слов, а у третьего — 82 слова?

550. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

РЕШЕНИЕ. Перейдем к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10% времени, а дождь не шел 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более $20+10+50=80\%$ времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше $100-80=20\%$ времени.

551. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

НАВОДЯЩИЙ ВОПРОС. Сколько человек не знают английский язык? испанский? немецкий?

552. Каждый десятый математик — философ. Каждый сотый философ — математик. Кого больше: философов или математиков?

553. Каких натуральных чисел от 1 до 1993 больше: тех, которые кратны 8, но не кратны 9, или тех, которые кратны 9, но не кратны 8?

УКАЗАНИЕ. Добавьте к тем и другим числа, кратные и 8, и 9. Останется сравнить количество чисел, кратных 8 $\left(\left[\frac{1993}{8}\right]=249\right)$[1], с количеством чисел, кратных 9 $\left(\left[\frac{1993}{9}\right]=221\right)$.

554. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не кратны ни 3, ни 5? А не кратных ни 2, ни 3, ни 5?

---

* **555.** У каждого из 40 юных техников, занимающихся в кружке тяжелого ракетостроения, есть винтики, болтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество болтиков не равно количеству гвоздиков, 15 человек. Тех, у кого число винтиков равно числу гвоздиков, — 10. Докажите, что есть не менее 15 юных техников, у которых число винтиков не равно числу болтиков.

556. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше — доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

УКАЗАНИЕ. Проще всего решить эту задачу, введя обозначения.

557. В одном стакане 9 ложек молока, в другом — 7 ложек чая. Ложку молока перелили из первого стакана во второй, пере-

---

[1] Квадратными скобками обозначают целую часть числа.

мешали и ложку чая с молоком перелили обратно в первый стакан. Чего больше: чая в молоке или молока в чае?

558. Три ученика решили вместе 100 задач, при этом каждый из них решил ровно 60 задач. Будем называть задачу, которую решили все трое, легкой, а задачу, которую решил только один из них,— трудной. На сколько больше трудных задач, чем легких?

* **559.** Боря, Витя и Саша играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается; если только у двоих — оба получают по одному очку; за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех набрал Боря — 19 очков. По скольку очков набрали Витя и Саша?

* **560.** На встрече собрались все участники двух туристских походов (одни были в двух походах, другие — только в одном). В первом походе было 60% мужчин, во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

55. ЗАМОСТИТЕ ПЛОСКОСТЬ!

561. На рисунке 116 показано, как плоскость[1] можно замостить скобками, состоящими из шести клеток каждая. Замостите плоскость: а) крестиками (рис. 117, *а*); б) крестами (рис. 117, *б*); в) скобками (рис. 117, *в*).

* **562.** На рисунке 118 показано, как копиями развертки куба можно замостить плоскость. Проверьте, что копиями любой из десяти других разверток куба (рис. 119) тоже можно замостить плоскость.

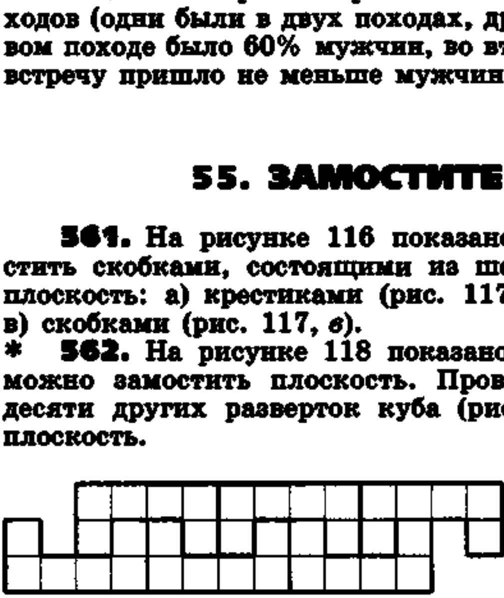


Рис. 116

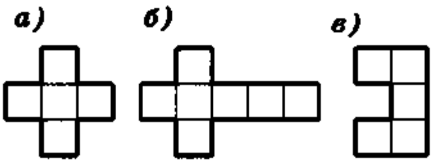


Рис. 117

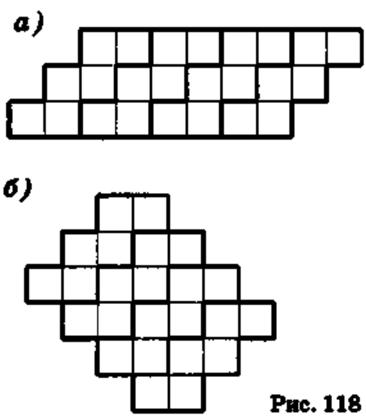


Рис. 118

[1] Плоскость — это «бесконечный лист бумаги». Разумеется, недостаточно заполнить тетрадную страницу — нужно придумать разбиение, неограниченно продолжаемое во все стороны.

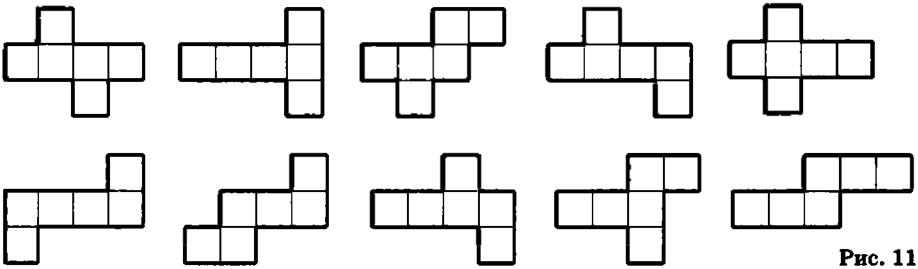


Рис. 119

563. Замостите плоскость одинаковыми: а) 5-угольниками; б) 7-угольниками; в) 9-угольниками.

56. ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА

Последняя цифра произведения (суммы, разности) зависит только от последних цифр чисел, над которыми производится арифметическое действие.

564. Найдите последнюю цифру числа $111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot 444 \cdot 555 \cdot 666$.

565. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечетных чисел от 1 до 51?

566. Замените звездочки цифрами так, чтобы получился правильный пример на умножение.

$$
\begin{array}{r}
\times\ {*}{*}{*}7 \\
{*}{*}{*} \\
\hline
+\ \ {*}{*}{*}{*}6 \\
{*}{*}203\ \ \\
{*}37{*}{*}\ \ \ \ \\
\hline
{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}
\end{array}
$$

567. Найдите остаток от деления $43^{43} - 17^{17}$ на 10.

568. В магазин привезли 223 л масла в бидонах по 10 л и 17 л. Сколько было бидонов?

569. Последняя цифра любого целого числа совпадает с последней цифрой его пятой степени. Докажите это.

---

570. Деревянный куб покрасили, а затем распилили на маленькие кубики, ребра которых в 5 раз меньше, чем у исходного куба (рис. 120). Получилось $5^3 = 125$ маленьких кубиков. У скольких кубиков оказались окрашены: а) три грани; б) две грани; в) только одна грань? Сколько осталось вовсе неокрашенных кубиков?

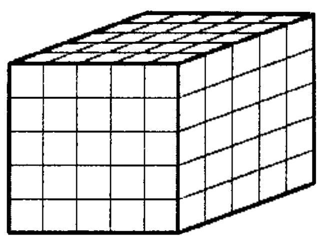


Рис. 120

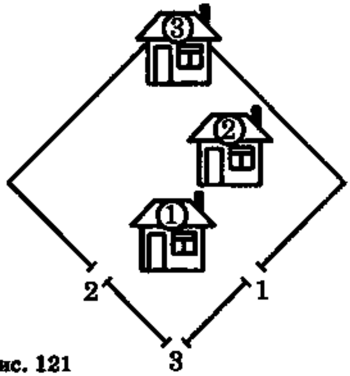


Рис. 121

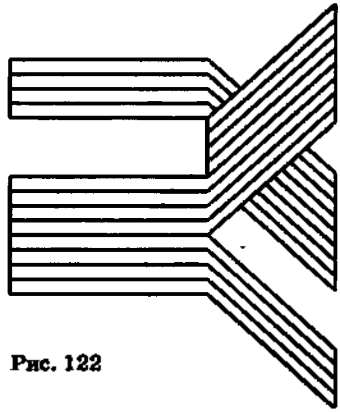


Рис. 122

571. На квадратном участке расположены три дома, а в ограде сделаны три калитки (рис. 121). От каждого дома проложите дорожку к калитке с тем же номером, чтобы дорожки не пересекались.

572. Можно ли вырезать из целого листа бумаги фигуру, изображенную на рисунке 122? (Приклеивать части нельзя.)

573. Внутри круга отметили точку A. Разрежьте круг на две части и расположите их так, чтобы получился круг с центром A.

574. Поставьте на доску 10×10 шесть ферзей, чтобы все поля были биты.

57. ОСТАТКИ

По определению делимости $3n$ — общая формула для чисел, делящихся на 3. Если из них вычесть по 1, то получим числа вида $3n-1$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$3n$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
$3n-1$	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

Все числа нижней строки таблицы при делении на 3 дают остаток 2.

$4n$ — формула для чисел, делящихся нацело на 4. Вычитая из них по 1, получим числа вида $4n-1$, которые при делении на 4 дают в остатке 3. Поскольку

$$4n-1=4(n-1)+3,$$

те же самые числа можно задать формулой $4n+3$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$4n$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
$4n+1$	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
$4n+2$	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
$4n+3$	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47

575. Напишите формулу для чисел, дающих при делении на 4 остаток: а) 0; б) 1; в) 2.

Разделить с остатком целое число a на натуральное число b — значит найти такое целое число q (неполное частное) и такое неотрицательное число r (остаток), что $a=bq+r$ и $r<b$. Например, равенство $179=12\cdot14+11$ означает, что 179 при делении на 12 дает неполное частное 14 и остаток 11. А равенство $5=7\cdot0+5$ означает, что 5 при делении на 7 дает неполное частное 0 и остаток 5.

576. Найдите остаток и неполное частное от деления: а) 1997 на 850; б) −200 на 23; в) $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+1$ на 5; г) 1 111 111 на 111; д) 98765432 на 12345679; е) $\underbrace{33\ldots33}_{50\ \text{цифр}}$ на $\underbrace{33\ldots33}_{18\ \text{цифр}}$.

577. При каком наименьшем n из любых n целых чисел можно выбрать 10 чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 6?

578. Сколько воскресений может быть в году?

579. Может ли быть в одном месяце пять воскресений?

580. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?

581. В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели было 20-е число этого месяца?

582. В некотором году понедельников было больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был 1-го января этого года?

583. Начнем считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-м будет большой, 2-м — указательный, 3-м — средний, 4-м — безымянный, 5-м — мизинец, 6-м — снова безымянный, 7-м — средний, 8-м — указательный, 9-м — большой, 10-м — указательный и т. д. Какой палец будет 2000-м?

584. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, крокус и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что

слева. В каком порядке будут стоять цветы через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

585. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, во втором — 18. На какое число делили?

58. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ОСТАТКОВ

586. Найдите остаток от деления на 7 числа, десятичная запись которого состоит из 1994 единиц.

587. а) При каких n число $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ цифр}}$ делится на 7?

б) Делится ли число $\underbrace{111\ldots11}_{100 \text{ цифр}}$ на 13?

588. Докажите, что если число вида 11...11 (записываемое одними единицами) нацело делится на 7, то оно делится нацело и на 13.

589. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{7}$.

590. На какую цифру оканчивается число: а) 2^{100}; б) $38^{77}+77^{38}$; в) 9999^{99999}?

591. Найдите две последние цифры числа 2^{2000}.

592. Существует ли число вида 1919...19, делящееся на 97?

* **593.** Если целые числа a и m взаимно просты, то найдется такое натуральное n, что a^n-1 делится на m. Докажите это.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите числа $1, a, a^2, \ldots, a^m$. Поскольку остатков от деления на m всего m, какие-то два из рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на m. Разность этих чисел нацело делится на m.

59. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ

Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый следующий член которой на одну и ту же величину d больше предыдущего[1]. Число d называют разностью прогрессии. Примеры арифметических прогрессий:

- 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26,

[1] При $d<0$ естественнее сказать, что каждый следующий член на одну и ту же величину меньше предыдущего.

Первый член этой арифметической прогрессии равен 2, второй — 5, третий — 8 и т. д. Разность прогрессии равна 3. Формула n-го члена этой прогрессии: $3n-1$. Подставив в эту формулу $n=1$, получим первый член: $3\cdot1-1=2$. Подставив $n=9$, получим девятый член: $3\cdot9-1=26$. Для нахождения 100-го члена надо подставить в формулу $n=100$ и вычислить: $3\cdot100-1=299$.

- 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,

  Здесь $d=0$. Постоянная последовательность тоже арифметическая прогрессия. Формула n-го члена очень проста: 3. (Если угодно, можно написать $3+0\cdot n=3$.)

- 11, 8, 5, 2, −1, −4, −7, −10, −13,

  Разность равна −3, поэтому прогрессия убывающая. Формула: $14-3n$.

- 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,

  Это — последовательность положительных нечетных чисел. Разность прогрессии равна 2. Формула: $2n-1$.

594. В арифметической прогрессии 6-й член равен 26, а 7-й член равен 30. Найдите разность и первый член прогрессии.

595. В арифметической прогрессии 8-й член равен −9, а 10-й равен −3. Найдите разность и первый член прогрессии.

596. В арифметической прогрессии 5-й член равен 9, а 105-й равен 309. Найдите разность прогрессии.

597. Найдите 5-й и 18-й члены прогрессии, n-й член которой задан формулой: $2n+5$.

598. Найдите формулу n-го члена арифметической прогрессии, первый член которой равен 23, а разность равна 5.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. Ответ $23+5n$ ошибочен.

599. Найдите все положительные члены арифметической прогрессии с первым членом 23 и разностью −5.

599. Найдите все отрицательные члены арифметической прогрессии с первым членом −23 и разностью 5.

600. Найдите все положительные члены арифметической прогрессии, n-й член которой задан формулой $58-10n$.

600. Найдите все отрицательные члены арифметической прогрессии, n-й член которой задан формулой $20n-78$.

601. Найдите первый член арифметической прогрессии, 12-й член которой равен 43, а разность равна 4.

УКАЗАНИЕ. Посмотрите на рисунок 123.

602. Найдите разность прогрессии, 10-й член которой равен 1998, а 15-й равен 98.

603. Что больше: 6-й член прогрессии с первым членом 1 и разностью 0,2 или 8-й член прогрессии, второй член которой 10, а разность равна −1?

604. Сколько среди членов арифметической прогрессии 2, 7, 12, 17, ... трехзначных чисел?

605. Какие числа входят и в прогрессию с первым членом 19 и разностью −2, и в прогрессию с третьим членом 3 и разностью 4?

606. Найдите арифметическую прогрессию, если сумма ее третьего и шестого членов равна 2, а сумма четвертого и девятого членов равна −14.

607. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 12. Второй ее член меньше пятого в 2 раза. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

608. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 50 меньше суммы ее следующих пяти членов. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

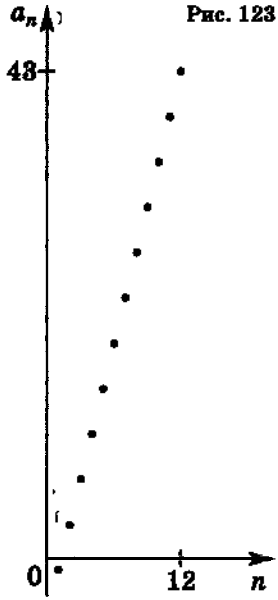


Рис. 123

609. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма четвертого, пятого, седьмого и шестнадцатого членов этой прогрессии равна 32.

610. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

60. ПРИМЕРЫ И КОНСТРУКЦИИ

Иди туда — не знаю куда,
принеси то — не знаю что.

611. Переставьте числа (рис. 124), чтобы суммы во всех указанных направлениях (по горизонталям, вертикалям и двум диагоналям) стали одинаковы.

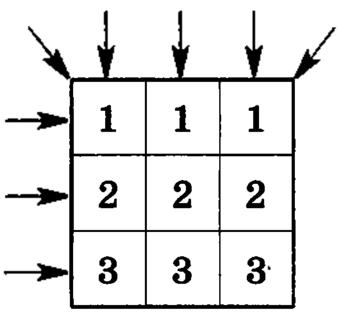


Рис. 124

612. а) Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблицу 3×3, чтобы суммы чисел всех указанных в предыдущей задаче направлений совпадали.

б) Расставьте таким же образом числа −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4.

УКАЗАНИЕ. Подсчитайте сумму всех данных чисел. Разделив ее на 3, получите «сумму по направлению».

613. Закрасьте клетки квадрата 4×4 в четыре цвета так, чтобы одинаковые цвета не повторялись ни в строчках, ни в столбцах, ни по обеим диагоналям.

ПОДСКАЗКА. Можно закрасить сначала 4 центральных квадрата; затем выкрасить диагонали большого квадрата, соблюдая условия задачи; потом закрасить остальные квадраты.

614. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую — опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

615. Придумайте число, которое оканчивается цифрами 1 и 7, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

616. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на: а) 11; б) 13; в) 1018?

617. Если натуральное число n не делится на 3, то найдутся два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n. Докажите это.

---

618. Номера автобусных билетов состоят из 6 цифр, начиная с билета 000 000 и кончая билетом 999 999. Билет считается счастливым, если сумма первых трех его цифр равна сумме трех последних. Достаточно ли купить 1000 билетов подряд, чтобы среди них наверняка нашелся хотя бы один счастливый?

619. Придумайте 100-значное число, не содержащее цифру 0 и делящееся на сумму своих цифр.

620. Можно ли перенумеровать ребра куба числами от 1 до 12 (каждое ребро — своим числом), чтобы сумма номеров любых трех ребер, сходящихся в одной вершине, делилась на 3?

620. Можно ли раскрасить ребра куба тремя красками, чтобы в каждой вершине сходились ребра всех трех цветов?

621. Придумайте а) четыре; б) тысячу натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

622. На плоскости проведено несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Всегда ли можно провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную?

623. В начале во всех клетках таблицы 3×3 стоят нули. Можно выбрать квадрат 2×2 и увеличить на 1 все четыре его числа. Удастся ли за несколько таких операций получить изображенную на рисунке 125 таблицу?

* **624.** Расположите на плоскости 11 одинаковых квадратов так, чтобы они не налегали друг на друга и выполнялось условие: как бы ни раскрасить квадраты в три цвета — обязательно найдутся два квадрата одного цвета, имеющие общий отрезок границы, т. е. прилегающие друг к другу частью стороны (не точкой!).

625. На плоскости лежат круги одинакового радиуса, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Всегда ли можно раскрасить круги в три цвета, чтобы любые два касающихся круга были разного цвета?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

Рис. 125

* **626.** Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги так разбить на доминошки 1×2, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

* **627.** Можно ли повесить веревочку на два гвоздя так, чтобы при вынимании любого гвоздя веревочка падала?

628. Бикфордов шнур горит неравномерно и сгорает ровно за 1 мин. Можно ли при помощи двух таких шнуров отмерить 45 с?

629. Можно ли в центры клеток шахматной доски вбить 16 гвоздей так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. Прямая — это не только вертикаль, диагональ или горизонталь. Центры клеток a1, b3 и c5 лежат на одной прямой!

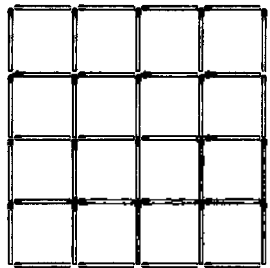


Рис. 126

630. а) Придумайте такую фигуру, которой нельзя накрыть полукруг, но двумя экземплярами которой можно накрыть круг того же радиуса.

б) Может ли такая фигура быть выпуклой?

* **631.** Из 40 спичек образована квадратная решетка (рис. 126). Покажите, как снять 9 спичек, чтобы полностью не сохранился контур ни одного квадрата (состоящего из одного или большего количества маленьких квадратиков). Достаточно указать один способ, как это сделать.

* **632.** Даны две одинаковые шестеренки, с 13 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так, что проекция на плоскость выглядит как одна шестеренка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестеренки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестеренка (проще говоря, чтобы никакие две дырки не совпали)?

633. Придумайте систему из четырех гирь, которыми можно взвесить на чашечных весах любой целый вес от 1 до 40 г. (Гири можно класть на обе чашки весов.)

ПОДСКАЗКА. Гири 1 и 2 г позволяют взвесить любой целый вес от 1 до 3 г. А гири 1 и 3 г – любой вес от 1 до 4 г. Придумайте три гири, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 13 г. И только после этого решайте задачу о четырех гирях.

634. Отметьте 6 точек на плоскости так, чтобы от каждой из них на расстоянии 1 находилось ровно 3 точки.

635. Расположите на плоскости 7 точек так, чтобы среди любых трех из них нашлись две на расстоянии 1.

636. Торт имеет форму прямоугольного параллелепипеда, верхняя грань которого — квадрат. Верх и бока торта равномерно покрыты глазурью. Разделите торт на 5 частей, чтобы все части содержали поровну и торта, и глазури.

637. Можно ли подобрать знаки в выражении $1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\pm11\pm12\pm13\pm14\pm15\pm16\pm17\pm18\pm19\pm20$, чтобы его значение стало равно 20?

* **638.** Через несколько лет после распада империи, состоявшей из 16 княжеств, оказалось, что каждое княжество дружит с тремя другими княжествами и враждует со всеми остальными. Можно ли разбить эти княжества на 8 пар дружественных княжеств?

61. СЛОЖИМ ПЕРВОЕ С ПОСЛЕДНИМ, ВТОРОЕ С ПРЕДПОСЛЕДНИМ, ...

Говорят[1], когда маленький Гаусс посещал начальную школу, учитель, надеясь отдохнуть, велел ученикам сложить числа от 1 до 20. Когда другие еще только собирались приступить к работе, Гаусс уже отложил грифельную доску. На ней было одно-единственное число — ответ!

Как же Гаусс смог быстро найти сумму первых 20 натуральных чисел? Наверное, он заметил закономерность:

$$1+20=2+19=3+18=\ldots=8+13=9+12=10+11=21$$

и умножил 21 на 10.

639. Геологи нашли 19 камней массами 1 кг, 2 кг, ..., 19 кг. Смогли ли они разложить эти камни по 10 рюкзакам, чтобы во всех рюкзаках был одинаковый груз?

640. Вычислите:

а) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$; б) $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8+9+10+11+12+13+14+15}$;

в) $(1+2+3+4+\ldots+1992+1993):1993$; г) $1+2+3+\ldots+99+100$.

641. В обычном наборе домино 28 костяшек. Сколько костяшек содержал бы комплект домино, у которого значения, указанные на них, изменялись бы не от 0 до 6, а от 0 до 11?

РЕШЕНИЕ. Достаточно подсчитать сумму первых двенадцати натуральных чисел (рис. 127):

$$12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=78.$$

[1] Хорошая история необязательно должна быть истинной, достаточно правдоподобия. Нужно ли слишком строго следовать за фактами?

Рис. 127

0:11											
0:10	1:11										
0:9	1:10	2:11									
0:8	1:9	2:10	3:11								
0:7	1:8	2:9	3:10	4:11							
0:6	1:7	2:8	3:9	4:10	5:11						
0:5	1:6	2:7	3:8	4:9	5:10	6:11					
0:4	1:5	2:6	3:7	4:8	5:9	6:10	7:11				
0:3	1:4	2:5	3:6	4:7	5:8	6:9	7:10	8:11			
0:2	1:3	2:4	3:5	4:6	5:7	6:8	7:9	8:10	9:11		
0:1	1:2	2:3	3:4	4:5	5:6	6:7	7:8	8:9	9:10	10:11	
0:0	1:1	2:2	3:3	4:4	5:5	6:6	7:7	8:8	9:9	10:10	11:11

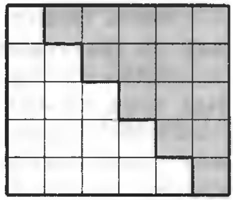


Рис. 128

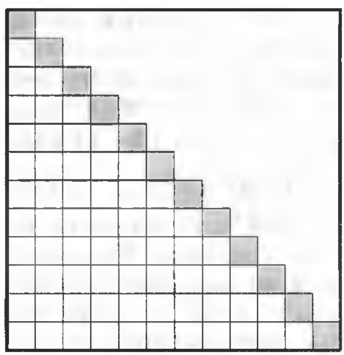
Есть и другой способ. В домино будет 12 дуплей. На одной половине кости, не являющейся дуплем, может стоять любое из 12 возможных чисел, а на другой — любое из 11 оставшихся чисел; итого $12 \cdot 11 = 132$ варианта. Каждый недупль мы таким образом посчитали дважды, поэтому их вдвое меньше, т. е. $132:2=66$. Вместе с 12 дуплями получаем ответ: $66+12=78$.

642. Вычислите сумму $1+2+3+\ldots+n$.

РЕШЕНИЕ. Первый способ. Прямоугольник размером $n \times (n+1)$ можно разбить на две равные части, каждая из которых состоит из $1+2+3+\ldots+n$ клеток (рис. 128).

Второй способ. В квадрате $n \times n$ на диагонали n клеток, ниже диагонали — $1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)$, выше — столько же (случай $n=12$ — на рисунке 129). Поэтому искомая сумма равна:

$$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}.$$



$$\frac{12^2-12}{2}+12=78$$

Рис. 129

Третий способ. Запишем слагаемые один раз в возрастающем, а другой раз в убывающем порядке:

$$S=1+\ 2\ +\ldots+(n-2)+(n-1)+n,$$
$$S=n+(n-1)+\ldots+\ 3\ +\ 2\ +1.$$

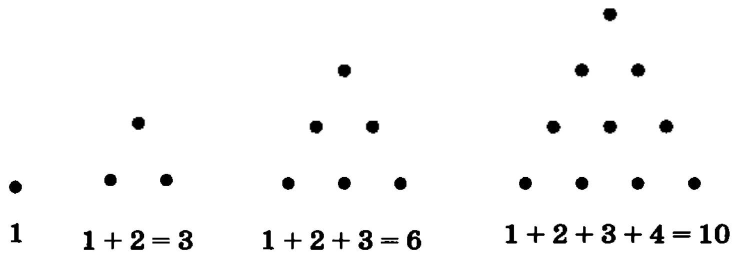


Рис. 130

Сложим полученные выражения:

$$2S=(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1).$$

Значит, $2S=n(n+1)$, *т. е.* $S=n(n+1):2$. *Задача решена.*

Числа вида $1+2+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}$ *называют треугольными (рис. 130).*

643. Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии, 13-й член которой равен 15.

644. Сколько надо взять слагаемых суммы $1+2+3+\ldots$, чтобы в результате сложения получить трехзначное число, в записи которого все цифры одинаковы?

645. Четвертый член арифметической прогрессии равен -1, а девятый равен 14. Сколько членов этой прогрессии (начиная с самого первого) надо взять, чтобы их сумма равнялась 35?

646. Имеются гири, вес которых (в граммах) — последовательные натуральные числа от 1 до 201 (всего 201 гиря). Назовем гирю хорошей, если после ее удаления оставшиеся 200 гирь можно разделить на две группы, равные по весу и по количеству гирь. Докажите, что: а) гиря весом 101 г хорошая; б) гиря весом 199 г хорошая.

647. Разложите на три равные по весу кучки:
а) 552 гири весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 552 г;
б) 555 гирь весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 555 г.
При каких n гири весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., n г можно разложить на три равные по весу кучки?

Подобно Гауссу, великий математик XX в. А. Н. Колмогоров вспоминал, что радость математического открытия он познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность

$$\begin{aligned}
&1 &&= && 1^2\\
&1+3 &&= 4 &&= 2^2\\
&1+3+5 &&= 9 &&= 3^2\\
&1+3+5+7 &&= 9+7=16 &&= 4^2\\
&1+3+5+7+9 &&= 16+9=25 &&= 5^2\\
&1+3+5+7+9+11 &&= 25+11=36 &&= 6^2
\end{aligned}$$

Эта закономерность коротко записывается тождеством

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Проще всего доказать его геометрически, нарисовав квадрат $n \times n$ и разрезав его на уголки из 1, 3, ..., $(2n-1)$ клеток (рис. 131).

*** 648.** Сформулируйте и докажите закономерность:

$$1=1,$$
$$3+5=8,$$
$$7+9+11=27,$$
$$13+15+17+19=64,$$
$$21+23+25+27+29=125,$$
$$\ldots$$

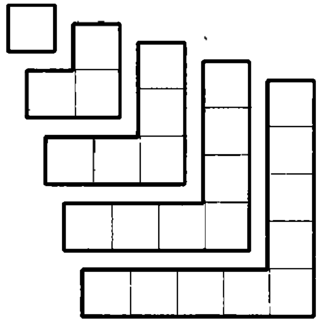


Рис. 131

62. В ЖАРКИЙ ЛЕТНИЙ ДЕНЬ...

Опыт есть то, до чего мы доходим опытным путем, на опыте убедившись, что не надо было набираться этого опыта.

Эккерман. *«РАЗГОВОРЫ С ГЕТЕ»*

649. Балда договорился с попом отработать год и расплатиться щелчками по лбу. Он предложил, чтобы за каждый отработанный день добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром, по его мнению, варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущенный вычитается аж 121 щелчок. По окончании срока выяснилось, что по обеим системам поп должен получить от Балды одно и то же число щелчков. Сколько же именно?

650. Два рыбака поймали 70 рыб, причем $\frac{5}{9}$ улова первого составляли караси, а $\frac{7}{17}$ улова второго — окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

651. Когда пассажиры вошли в пустой трамвай, половина их заняла места для сидения. Сколько было пассажиров, если после первой остановки их число увеличилось ровно на 8% и известно, что трамвай вмещает не больше 70 человек?

652. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

653. В жаркий летний день представители нескольких фирм собрались на переговоры. Вначале за каждым столом сидели по два человека — и официант поставил на каждый стол по бутылке минеральной воды. Потом представители разбились на группы по трое. Официант принес на каждый столик по бутылке лимонада. В заключение за каждым столом собралось по четыре человека — и официант поставил еще по бутылке. Кроме того, каждый фирмач выпил по бутылочке пепси-колы. Всего было выпито 50 бутылок. Все поданные напитки были выпиты. Сколько человек участвовало в переговорах?

654. В три магазина привезли всего 1990 книг. В первые три дня один магазин продал соответственно $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{11}$ и $\frac{1}{2}$ части полученных им книг, второй магазин — $\frac{1}{57}$, $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{3}$ части полученных вторым магазином книг, а третий магазин — $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{30}$ и $\frac{1}{10}$ части полученных им книг. Сколько книг получил каждый магазин?

655. В карьере заготовлено 200 гранитных плит, 120 из которых весят по 7 т каждая, а остальные — по 9 т. На железнодорожную платформу можно грузить до 40 т. Сколько платформ нужно для вывоза плит из карьера?

656. Магазину надо было получить со склада 185 кг конфет. На складе имеются ящики с конфетами по 16 кг, 17 кг и 21 кг. Каких ящиков и сколько мог получить магазин?

657. Льюис Кэрролл как-то отправил своей племяннице следующий счет:

	Фунты	Шиллинги	Пенсы
За одну похищенную перчатку		2	0
За боль от потери		3	8,5
За доставленное беспокойство		4	4,5
За причиненные неприятности		14	7
За время, потраченное на поиски вора		1	6
Итого	1	6	2

Можно ли по этим данным определить, сколько в фунте шиллингов, а в шиллинге пенсов, если в фунте больше шиллингов, чем в шиллинге пенсов?

* **658.** Сто буйволов съели 100 охапок сена. Стоявшие буйволы съели по 5 охапок, лежавшие — по 3 охапки, а спавшие — по $\frac{1}{3}$ охапки. Сколько буйволов стояло, а сколько лежало?

659. Пастух пас стадо из 100 голов. За это ему заплатили 200 р. За каждого быка заплатили 20 р., за корову — 10 р., а за теленка — 1 р. Сколько в стаде быков, сколько коров и сколько телят?

660. Двенадцать человек — мужчин, женщин и детей — несут двенадцать хлебов. Каждый мужчина несет по два хлеба, каждая женщина — по полхлеба, каждый ребенок — по четверти хлеба. Сколько мужчин, сколько женщин и сколько детей?

УКАЗАНИЕ. Можно перебирать возможности по количеству мужчин, можно — по количеству женщин, можно — по количеству детей. Какой из этих вариантов быстрее приведет к цели — таким и действуйте!

---

661. Найдите хотя бы две пары натуральных чисел x и y, для которых верно равенство $2x^3=y^4$.

662. Приведите пример таких отличных друг от друга натуральных чисел x, y и z, что $x^3+y^3=z^4$.

663. Трем мудрецам показали 5 колпаков: 3 черных и 2 белых. Затем им завязали глаза и надели всем троим по черному колпаку. После этого с них сняли повязки и предложили каждому определить, какого цвета колпак на нем. Через некоторое время один из мудрецов догадался, что на нем черный колпак. Объясните, какие рассуждения позволили ему сделать такой вывод.

664. Верно ли, что число n^2+n+41 простое при любом натуральном n?

63. ИНДУКЦИЯ

> ...Выпросился остаться одну ночку; от одной ночки две ночки, от двух ночек две недели, от двух месяцев два года, а от двух годов жил тридцать лет.

665. Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

УКАЗАНИЕ. Сначала придумайте три числа, сумма которых делится на каждое из них. Потом подумайте, нельзя ли получить четыре таких числа...

666. Делится ли число 11...11 (81 единица) на 81?

ПОДСКАЗКА. 111 делится на 3, 111 111 111 делится на 9, а число 111 111 111 111 111 111 111 111 111 на 27. Можно показать, что составленное из 3^n единиц число делится на 3^n. Есть и другое рассуждение: при делении числа 111 111 111 на 9 получится некоторое число (догадайтесь устно, какое именно, хотя это и не важно). Чтобы разделить число 11...11 (81 единица) на 9, достаточно 9 раз подряд написать это частное. Осталось вспомнить признак делимости на 9.

667. а) Очевидно, квадрат нельзя разрезать на 2 или 3 квадрата, но можно — на 6 или 7 квадратов (рис. 132). Укажите все значения n, для которых квадрат нельзя разрезать на n меньших квадратов.
б) При каких n правильный треугольник нельзя разрезать на n меньших правильных треугольников?

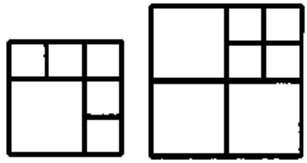


Рис. 132

668. В поселке 100 домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов? (Например, на рисунке 133 всего 4 дома и 7 заборов.)

УКАЗАНИЕ. Решите задачу сначала не для 100, а для меньшего числа домов — для 1, 2, 3...

669. а) Плоскость разбита несколькими окружностями на части. Докажите, что каждую часть можно выкрасить одной из двух красок так, что любые две ограничивающие по дуге части будут разного цвета.
б) Докажите то же самое, если плоскость разбита на части окружностями и прямыми.
в) На плоскости расположено несколько треножников (треножник состоит из трех лучей с общей вершиной). Докажите, что если никакие два из ограничивающих треножники лучей не параллельны, то части, на которые они разбивают плоскость, можно выкрасить тремя красками так, чтобы части, граничащие по отрезку или лучу, оказались бы выкрашены в разные цвета.

670. В таблице из трех строк и 1992 столбцов произвольным образом расставлены фишки: 1992 белых, 1992 красных и 1992 синих. Докажите, что можно так переставить фишки в каждой строке, чтобы в каждом столбце оказались фишки всех трех цветов.

671. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость n прямых?

УКАЗАНИЕ. Три прямые делят плоскость самое большее на 7 частей (рис. 134). Четвертая прямая (рис. 135) разрезает не все, а только 4 части и разбивает плоскость на 11 частей.

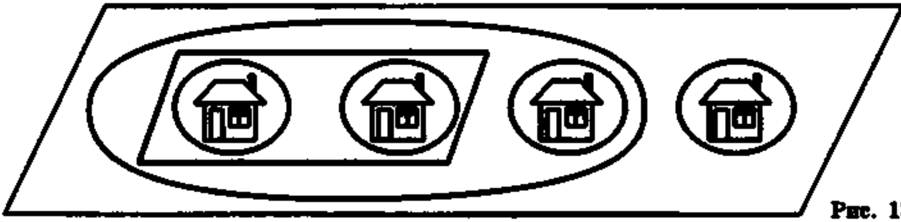


Рис. 133

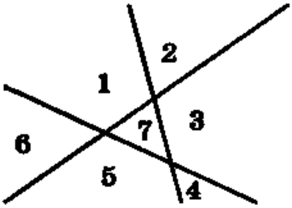


Рис. 134

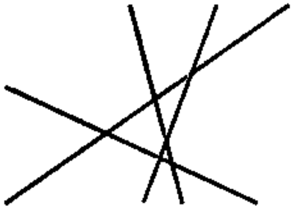


Рис. 135

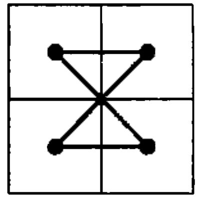


Рис. 136

64. ОБХОДЫ

672. На рисунке 136 показан маршрут короля, который обошел все клетки доски 2×2, чередуя диагональные и недиагональные ходы. Может ли он таким образом обойти доску 8×8?

673. Обойдите конем доску размером: а) 4×5; б) 4×6; в) 4×7.

674. а) Докажите, что при $n>4$ доску размером $4\times n$ можно обойти конем, побывав на каждом поле по одному разу.
б) Докажите, что это невозможно, если необходимо последним ходом вернуться на исходную клетку.

675. Обойдите конем, побывав на каждом поле ровно по одному разу, доску размером: а) 5×5; б) 10×10; в) 13×13.

65. ДЕРЕВЬЯ

Дурак видит не то самое дерево, что видит умный.

Вильям Блейк[1]

Систему точек (вершин), соединенных линиями (ребрами), называют *деревом*, если из любой точки в любую можно пройти единственным образом.

676. В доску вбито 20 гвоздиков (рис. 137). Расстояние между соседними равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от A до B так, чтобы она прошла через все гвоздики.

677. Сколько было бревен, если, сделав 52 распила, из них получили 72 полена?

678. Гриша пошел с папой в тир. Уговор был такой. Гриша делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право сделать еще 2 выстрела. Гриша выстрелил 17 раз. Сколько раз он попал в цель?

ПОЯСНЕНИЕ. Ответ можно угадать, взглянув на рисунок 138. Но нужно доказать, что ответ будет именно таким в любом случае.

[1] Вильям Блейк (1757—1827) — английский поэт и художник.

679. а) Имеется лист бумаги. Его можно разорвать на 5 частей. Каждый новый кусок можно разорвать на 5 частей или оставить целым и т. д. Можно ли получить таким образом 50 кусков?
б) Если всякий раз лист можно рвать на 8 или на 12 частей, выясните, можно ли из одного листа получить 60 кусков. Докажите, что любое число кусков, большее 60, получить можно.

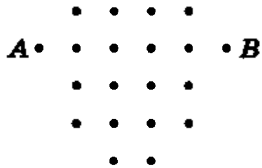


Рис. 137

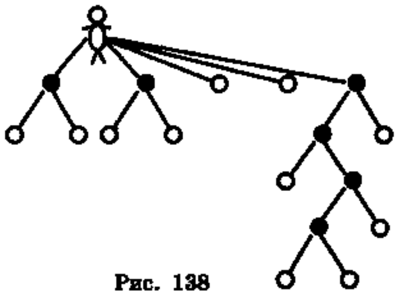


Рис. 138

680. Несколько точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой можно пройти в каждую по отрезкам, причем единственным путем (рис. 139). Докажите, что отрезков на один меньше, чем точек.

681. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички? (На рисунке 140 убрано 63 спички. Нельзя ли обойтись меньшим числом?)

682. На рисунке 141, *а* изображена сетка размером 4×6, а на рисунке 141, *б* показано, как можно разрезать 24 веревочки так, чтобы она не распалась. Какое наибольшее число веревочек, соеди-

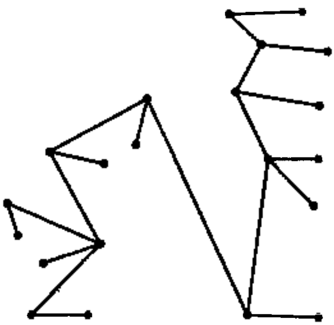
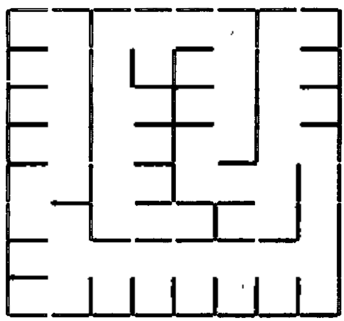


Рис. 139

Рис. 140


а) *б)*

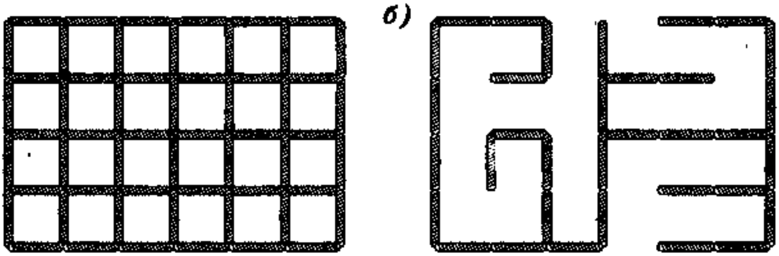



Рис. 141

няющих соседние узлы сетки, можно разрезать, чтобы сетка не распалась на отдельные куски? А если размер сетки $m \times n$?

683. В землю вбили 19 колышков. Двое по очереди связывают пары колышков бечевкой: каждым ходом — одну пару. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечевок (вершинами ломаной должны быть колышки). Не разрешается связывать два уже ранее соединенных колышка. Кто выиграет при правильной игре?

684. Карлсон предложил Малышу следующую игру. На столе лежат две кучки: в одной 7 спичек, а в другой 8. Начинающий делит кучку на две кучки, затем второй делит одну из кучек на две и т. д. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Карлсон начинает. Кто выиграет? Зависит ли результат от того, кто как играет, или важно лишь, кто ходит первым?

685. Имеется три кучки камней: в первой 10, во второй 15, в третьей 20. Играют двое. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

686. Все началось с одной курицы, которая снесла два яйца. Из них вывелись цыплята: петух и курица. Когда они подросли, петуха съели, а курицу съели только после того, как она снесла два яйца. Так делали и дальше: из яиц выводили цыплят и т. д. Все прекратилось, когда из яиц вылупились одни только петухи. Всего было съедено 1994 петуха. Сколько было кур?

* **687.** В ряд выложены 100 монет: орел, решка, орел, решка... За один ход разрешается перевернуть несколько подряд лежащих монет. За какое минимальное количество ходов можно добиться, чтобы все монеты оказались орлом вверх?

При решении многих задач полезно рисовать картинки, схемы. Например, следующую задачу трудно решить устно или подбором — нет сил думать о 9 цифрах сразу. Но как только нарисуете схему — ответ станет очевиден.

688. Можно ли расставить числа 1, 2, ..., 9 по кругу, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

689. Можно ли записать цифры от 0 до 9 в строку так, чтобы число, составленное из любых двух подряд идущих цифр, делилось на 7 или на 13?

690. В школьном драмкружке решили ставить «Ревизора», и тут разгорелся спор.

— Ляпкиным-Тяпкиным буду я,— заявил Гена.

— Нет, я! Я всю жизнь мечтал воплотить этот образ,— возразил Дима.

— Хорошо, я уступлю, если мне дадут роль Хлестакова,— проявил великодушие Гена.

— А мне Осипа,— не уступил в великодушии Дима.
— Хочу быть Земляникой или Городничим,— сказал Володя.
— Нет, Городничим буду я,— хором закричали Алик и Боря,— или Хлестаковым,— добавили они одновременно.
Удастся ли ребятам распределить роли так, чтобы все были довольны?

691. Во время длительного плавания некоторые моряки поссорились и перестали разговаривать друг с другом. В таблице знаком «+» обозначено, что данные люди еще не поссорились, а знак «−» означает, что они уже поссорились. Радист A узнал некоторую новость и сообщил ее одному из тех, кто с ним разговаривает (т. е. D или G), тот еще одному и т. д. Мог ли узнать эту новость F?

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
A		−	−	+	−	−	+	−	−
B	−		+	−	+	−	−	−	+
C	−	+		+	+	−	−	−	−
D	+	−	+		+	−	−	−	−
E	−	+	+	+		−	−	−	−
F	−	−	−	−	−		−	+	+
G	+	−	−	−	−	−		−	−
H	−	−	−	−	−	+	−		+
I	−	+	−	−	−	+	−	+	

692. Расставьте числа 1, 2, 3, ..., 8 в кружочках (рис. 142) так, чтобы ни в каких двух соединенных отрезком кружочках не оказались соседние натуральные числа.

693. В очереди стоят Юра, Миша, Вова, Саша и Олег. Юра стоит раньше Миши, но после Олега. Вова и Олег не стоят рядом. Саша не стоит рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Вовой. В каком порядке стоят ребята? (Не только придумайте ответ, но и объясните, почему другие случаи невозможны.)

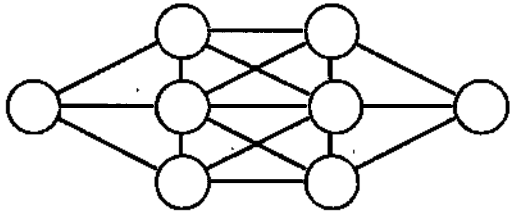


Рис. 142

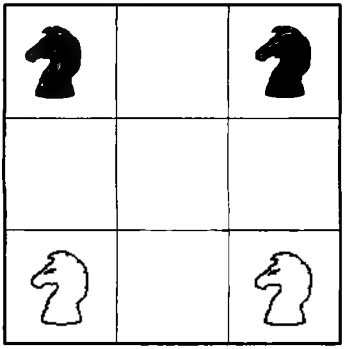


Рис. 143

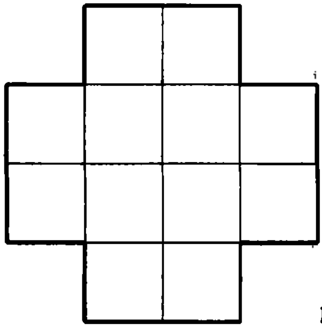


Рис. 144

694. Замените буквы в слове ТРАНСПОРТИРОВКА цифрами (разные буквы — разными цифрами, одинаковые — одинаковыми) так, чтобы выполнялись неравенства:

$$Т>Р>А>Н<С<П<О<Р<Т>И>Р>О<В<К<А.$$

695. В верхних углах доски 3×3 стоят черные кони, в нижних — белые (рис. 143).
а) Поменяйте их местами (т. е. добейтесь, чтобы в верхних углах оказались белые кони, а в нижних — черные).
б) Сколько ходов для этого необходимо?
в) Можно ли, следуя шахматным правилам, добиться, чтобы по одной диагонали оказались белые кони, а по другой — черные?

696. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (рис. 144). Можно ли ее обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и вернувшись на исходное поле?

697. Может ли конь обойти доску, побывав на каждой клетке один раз, если размер доски: а) 3×4; б) 4×4? (Возвращаться последним ходом на исходную клетку не обязательно.)

66. В СПОРТКЛУБЕ ТРЕНИРУЮТСЯ 100 ТОЛСТЯКОВ...

698. Сколько можно взять разных натуральных чисел, не превосходящих 10, чтобы среди них не нашлось двух, одно из которых точно вдвое больше другого?

699. В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 кг до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит точно вдвое больше другого?

699. Разбейте натуральный ряд на две части, не содержащие двух чисел, одно из которых точно вдвое больше другого.

УКАЗАНИЕ. Для размышлений пригодится таблица:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536	...
5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	...
7	14	28	56	112	224	448	896	1792.............		
9	18	36	72	144	288	576	....			
11	22	44	88	176	....					
13	26	52	104	208	....					

....

700. В шеренгу выстроены 1000 военных. На каждом из них — фуражка или бескозырка. При этом если на ком-то фуражка, то любой военный, стоящий через девять человек от него, обязательно в бескозырке. (Например, если 28-й военный в фуражке, то и 18-й, и 38-й в бескозырках.) Докажите, что в фуражках не более 500 военных.

701. Из первых 100 натуральных чисел выбирают 55 чисел. Верно ли, что в любом случае среди выбранных чисел найдутся два таких, разность между которыми равна: а) 9; б) 10; в) 11; г) 12; д) 13?

702. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Какие именно числа выбраны?

703. Из $n+1$ натуральных чисел, ме́ньших $2n$, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите это.

67. БЫСТРОЕ ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ

704. Найдите закономерность, облегчающую возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5.

РЕШЕНИЕ. Бросается в глаза то, что все квадраты рассматриваемых чисел оканчиваются цифрами 25.

n	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
n^2	25	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025	11025	13225

Если вычеркнуть эти две последние цифры числа n^2 и если вычеркнуть в числе n последнюю цифру 5, то получим новую таблицу.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(a)$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132

Осталось понять, как по числу a можно получить число $f(a)$. Для этого мы напишем формулу, которая сопоставит, например, числу 7 число $f(7)=56$, числу 10 число $f(10)=110$ и т. д.

Формула очень простая: $f(a)=a(a+1)$. Она означает, что для возведения в квадрат числа $n=10a+5$, получающегося приписыванием к числу a справа цифры 5, достаточно к произведению $a(a+1)$ справа приписать две цифры 25.

Например, для возведения в квадрат числа 195 достаточно посчитать $19\cdot 20=380$ и приписать цифры 25. Получаем ответ: $195^2=38\,025$.

Чтобы доказать формулу, достаточно раскрыть скобки:

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100\cdot a(a+1)+25.$$

Умножение на 100 соответствует сдвигу на два разряда, а прибавление 25 как раз дает цифры 25, которыми оканчиваются все рассматриваемые квадраты.

68. УМНОЖЕНИЕ СТОЛБИКОМ

> **Делая что-нибудь бесполезное, ограничивайтесь лишь самым необходимым.**
>
> **Шамфор**

Казалось бы, что сложного в умножении столбиком? А на самом деле, это — один из первых (и один из самых нужных!) алгоритмов, с которыми мы встречаемся в математике.

705. Из числа 12345678987654321 извлеките квадратный корень. (Квадратный корень из неотрицательного числа a — это такое неотрицательное число x, которое в квадрате равно a. Например, $\sqrt{9}=3$ и $\sqrt{144}=12$, поскольку $9=3^2$ и $144=12^2$.)

УКАЗАНИЕ. Сначала найдите $\sqrt{1}=1$ (не смейтесь, произведение $1\cdot 1$ действительно равно 1), затем $\sqrt{121}=11$, далее $\sqrt{12\,321}$, $\sqrt{1\,234\,321}$, ..., а потом подметьте закономерность.

706. Является ли число 1020304050607080908070605040302 01 точным квадратом?

УКАЗАНИЕ. Сначала придумайте такое число x, что $x^2=10\,201$, потом извлеките $\sqrt{102\,030\,201}$, а затем все само собой станет ясно.

707. Представьте число 11...1122...22 (десятичная запись состоит из 100 единиц и 100 двоек) в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

ПОДСКАЗКА. $4\cdot 3=12$, $34\cdot 33=1122$, $334\cdot 333=111\,222$. Продолжите этот ряд равенств разумным образом — и казавшаяся сложной задача будет решена!

708. Докажите, что являются квадратами (т. е. произведениями некоторого натурального числа на себя) все числа вида:
а) 16; 1156; 111 556; 11 115 556 и т. д. (в середину десятичной записи предыдущего числа вставляется 15);
б) 49; 4489; 444 889; 44 448 889 и т. д. (в середину десятичной записи предыдущего числа вставляется 48).

709. Докажите, что если в числе 12 008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19. (Например, на 19 делятся числа 12 008, 120 308, 1 203 308.)

---

710. В полдень самолет вылетел из столицы в город Энск и приземлился там в 14 ч местного времени. В полночь по местному времени он вылетел обратно и оказался в столице в 6 ч утра. Сколько времени длился полет?

711. На фестивале камерной музыки собралось 6 музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из 6 музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

712. Многочисленные посетители Томаса Эдисона удивлялись, почему калитка в саду перед домом великого изобретателя открывается с трудом. Наконец, один из друзей не выдержал: «Неужели такой технический гений, как ты, не может отрегулировать калитку?» — «Калитка отрегулирована правильно,— возразил Эдисон.— Я сделал от нее привод к цистерне, и каждый, кто приходит ко мне, накачивает в цистерну 20 литров воды». Если бы каждый посетитель вместо 20 л накачивал 25 л воды, то для заполнения цистерны понадобилось бы на 12 человек меньше. Сколько воды вмещает цистерна?

713. Разрешается переставлять местами любые две строки таблицы. Разрешается менять местами и любые два ее столбца. Можно ли таким образом из левой таблицы получить правую?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

12	9	6	11
4	1	2	3
8	5	10	7

714. Сколько выстрелов в игре «Морской бой» на доске 7×7 надо сделать, чтобы наверняка ранить четырехклеточный корабль? (Корабль может быть расположен или вертикально, или горизонтально.)

715. Рядовой успевает прочитать устав за 12 дней, а ефрейтор — за 9 дней. После того как 5 дней устав по утрам читал рядовой, ему стал помогать по вечерам ефрейтор. Сколько дней они дочитывали устав?

716. а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.
б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?
в*) Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное утверждение верно, для каких нет.

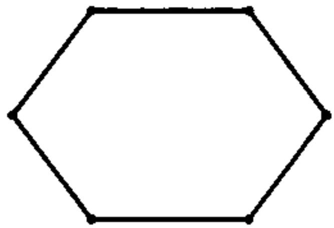


Рис. 145

717. На бумаге записана последовательность из 360 цифр: 123123...123123...123. На какое наибольшее число частей можно разрезать бумагу, чтобы все числа на полученных при этом кусках бумаги были разными?

718. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике — 50, по информатике — 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше, чем ответ «в одной». Сколько всего учеников участвовали в этих олимпиадах?

719. Трое играли в шашки. Всего сыграли три партии. Сколько партий сыграл каждый?

720. В доску вбили гвозди и соединили их проводами. Каждый с каждым. Сколько понадобилось проводов, если гвоздей было: а) 10; б) n?

721. Шахматисты сыграли 224 партии. Каждые двое сыграли друг с другом одно и то же число партий. Сколько шахматистов?

722. Сыграв по 5 партий, два участника кругового шахматного турнира выбыли из игры, и по этой причине в турнире было сыграно лишь 38 партий. Сыграли ли эти шахматисты друг с другом?

723. Вовочка устроил пресс-конференцию по случаю своего дня рождения. Все собранные журналисты были знакомы друг с другом, и все обменялись рукопожатиями. Когда вошел Вовочка, он обменялся рукопожатиями с теми журналистами, с которыми он был знаком. В результате всего было сделано 80 рукопожатий. Со сколькими из приглашенных на пресс-конференцию журналистов был знаком Вовочка?

724. На рисунке 145 изображены 6 отрезков, у которых 6 концов. Сколько различных концов может быть у 6 разных отрезков?

69. ЧТО ТАКОЕ ГРАФ?

Термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д. Кенига в 1936 г., хотя начальные важнейшие теоремы о графах восходят к Л. Эйлеру (XVIII в.).

Граф состоит из вершин (точек) и ребер (линий). Точное определение графа дать не сложно, но, пожалуй, для первого знакомства оно скучновато. Поэтому лучше запомните, что не имеет значения, какой длины и какой формы линии соединяют вершины графа. Важно лишь, какие вершины соединены ребрами, а какие – нет.

Один и тот же граф можно нарисовать разными способами. Например, если в турнире пяти команд *A*, *B*, *C*, *D*, *E* команда *A* сыграла с *B*, *D* и *E*, команда *C* сыграла с *B* и *D* и еще *D* сыграла с *E*, то рисунки 146 и 147 правильно изображают описанную ситуацию. Одинаковые, но по-разному нарисованные графы называют изоморфными. Например, графы рисунков 148–150 изоморфны.

Количество ребер, выходящих из данной вершины, называется степенью (валентностью) этой вершины. Например, на рисунке 151 вершина *A* имеет степень 3, вершина *B* – степень 2, вершина *C* – степень 1, а вершина *D* – степень 0.

Если мы сложим степени всех вершин некоторого графа, то при этом подсчете каждое ребро будет учтено дважды (оно ведь соединяет две вершины!). Поэтому сумма степеней всех вершин графа в два раза больше, чем число его ребер. В частности, сумма степеней всех вершин графа четна.

725. **Можно ли расположить на плоскости 7 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?**

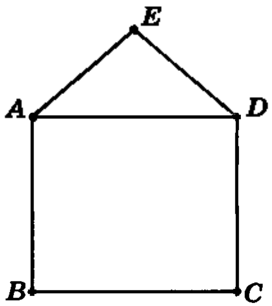


Рис. 146

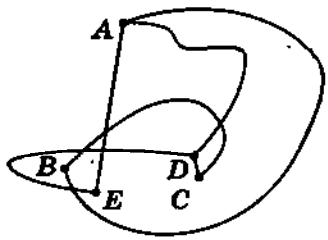


Рис. 147

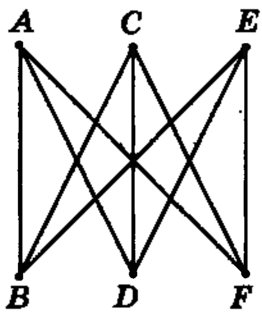


Рис. 148

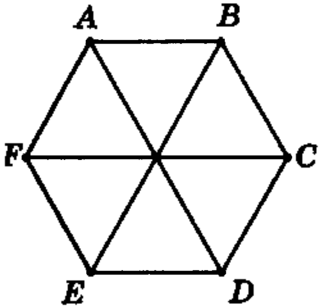


Рис. 149

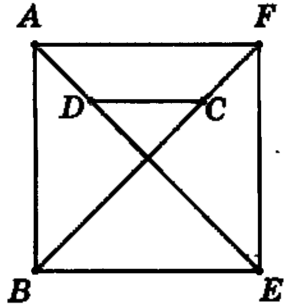


Рис. 150

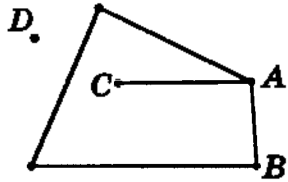


Рис. 151

726. а) Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими? (На рисунке 152 показано, что 6 отрезков так расположить можно.)
б) Нарисуйте 4 вертикальных и 4 горизонтальных отрезка, чтобы каждый отрезок пересекал 3 отрезка другого направления (т. е. каждый вертикальный — 3 горизонтальных, а каждый горизонтальный — 3 вертикальных).

727. При каких n можно расположить в пространстве n одинаковых шаров так, чтобы каждый касался ровно трех других?

Граф называется связным, если любые две его вершины могут быть соединены путем[1], т. е. если из любой вершины в любую другую можно пройти по ребрам графа.
Как выглядит несвязный граф? Он состоит из нескольких «кусков» – компонент связности. От каждой из вершин компоненты связности можно добраться по ребрам графа до любой другой. А от вершины одной компоненты до вершины другой компоненты пройти по ребрам нельзя. Например, изображенный на рисунке 153 граф состоит из 9 компонент (две из них – изолированные вершины).

728. В графе 15 вершин. Степени его вершин A и B не меньше 7 каждая. Докажите, что по ребрам графа можно пройти из вершины A в вершину B.

РЕШЕНИЕ. Из вершины A выходит не менее чем 7 ребер. Из B — тоже не менее 7 ребер. Если бы из A нельзя было по ребрам добраться до B, то в графе было бы не менее $1+7+1+7=16$ вершин (рис. 154). Но вершин только 15.

729. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не меньше $\frac{n-1}{2}$, связен.

Рис. 154

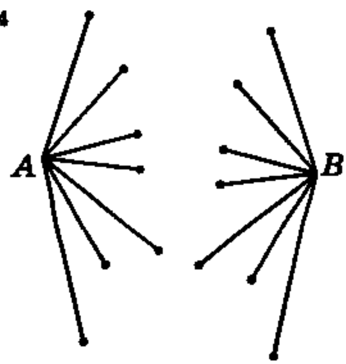


Рис. 153

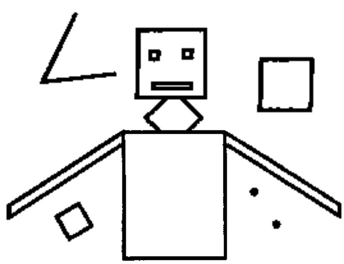
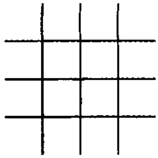


Рис. 152



[1] Путь — последовательность ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.

70. ТУРНИРЫ

Круговой турнир — это турнир, в котором каждые две команды играют друг с другом ровно один раз. При этом в шахматах победа приносит 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0 очков; а в футболе соответственно 3, 1 и 0 очков. В волейболе и теннисе ничьих не бывает.

В любом круговом турнире число партий, сыгранных k участниками между собой, равно $\frac{k(k-1)}{2}$. Действительно, каждый из k участников должен сыграть с каждым из $k-1$ остальных, и при этом каждая партия учитывается дважды.

730. В футбольном турнире каждая из 8 команд сыграла с каждой по одному разу. Команды набрали соответственно 14, 12, 8, 7, 7, 4, 3 и 1 очко. Сколько очков команды, занявшие первые три места, потеряли в играх с остальными командами?

731. В однокруговом футбольном турнире участвовали 6 команд. В итоге турнира команды набрали (в порядке занятых мест) 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. Сколько матчей закончились вничью?

732. В турнире участвовали 8 шахматистов (каждый сыграл по одной партии с каждым). Все они набрали различное число очков. Занявший второе место набрал столько же очков, сколько набрали вместе шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой занявшие 3-е и 5-е места?

* **733.** После окончания шахматного турнира, проходившего в один круг (каждый участник сыграл с каждым одну партию), его участники — Щукин, Окунев, Ершов, Карасев и Пескарев — обменивались впечатлениями.

— Удивительно, но только я один не испытал горечь поражения,— сказал Окунев.

— А вот мне единственному не удалось одержать ни одной победы,— заметил Пескарев.

Восстановите турнирную таблицу, т. е. выясните, кто как с кем сыграл, если известно, что Щукин набрал очков больше, чем Окунев, Окунев — больше, чем Ершов, Ершов — больше, чем Карасев, а Карасев — больше, чем Пескарев.

* **734.** В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Могло ли у каждой команды число побед оказаться равным числу ее ничьих, если всего команд: а) 17; б) 16; в) 15?

735. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

736. В шахматном турнире участвовало втрое больше мужчин, чем женщин. Каждые двое сыграли по одной партии. Мужчины набрали в 1,2 раза больше очков, чем женщины. Сколько было шахматистов?

737. В шахматном турнире участвовали n шахматистов — мастера и гроссмейстеры. После окончания турнира оказалось, что каждый участник ровно половину своих очков набрал в партиях против мастеров. Докажите, что n — квадрат целого числа.

738. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым одну партию. Оказалось, что все, кроме Вори, набрали одинаковое число очков. Докажите, что Воря либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

* **739.** Шесть волейбольных команд решили провести турнир в один круг так, чтобы каждая команда ежедневно играла одну игру. Первые три дня команды играли, выбирая партнеров случайным образом, но с условием, что все три дня они играют с разными командами. Сможет ли судья турнира составить расписание на оставшиеся два дня так, чтобы все команды сыграли друг с другом по одному разу?

71. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

> Дважды два — четыре,
> два да три — пять.
> Вот и все, что мы можем,
> Что мы можем знать.
>
> О. Мандельштам

740. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько в доме этажей, если всего в нем 105 квартир?

741. Придумайте 10 натуральных чисел, у которых и сумма, и произведение равны 20.

742. Представьте число 203 в виде суммы нескольких натуральных чисел, произведение которых тоже равняется 203.

743. Может ли произведение цифр натурального числа равняться 528?

744. Решите ребус: К·О·Т=У·Ч·Е·Н·Ы·Й.

745. Известно, что произведение двух взаимно простых чисел равно 864. Найдите эти числа.

746. Произведение числа 21 на некоторое четырехзначное число — точный куб. Найдите это четырехзначное число.

747. В этом числовом ребусе почти все неизвестно, однако он имеет единственное решение. Какое?

$$
\begin{array}{r}
\times\ \begin{array}{r} *\,*\,* \\ *\,*\,* \end{array} \\
\hline
+\ \begin{array}{r} *\,*\,*\,* \\ *\,*\,* \end{array} \\
\hline
\mathrm{AAAAA}
\end{array}
$$

748. Каждое из двух различных натуральных чисел умножили на сумму его цифр. Могли ли получиться равные результаты?

749. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

750. Можно ли расставить в клетках таблицы 3×3 числа 1, 2, ..., 9 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце делилось на 4?

751. Найдите последние восемь цифр числа $30! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 29 \cdot 30$.

752. Какое наименьшее число сомножителей нужно вычеркнуть в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$ так, чтобы произведение оставшихся сомножителей оканчивалось цифрой 2?

753. а) Царь Дадон захватил 100 пленников и посадил их в одиночные камеры. К замкам всех 100 камер подходил один ключ. Его поворот отпирал замок, следующий поворот запирал, еще один отпирал и т. д. Ко дню своего рождения царь решил освободить заключенных и накануне послал слугу, который вставил ключ в замок каждой камеры и повернул на один оборот. Все двери оказались отперты. Однако день рождения еще не наступил, и стража не выпускала никого из камер. Едва посыльный возвратил ключ, царь Дадон поручил новому посланцу повернуть ключ в замке каждой второй камеры. Двери второй, четвертой, шестой и т. д. камер вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ключ в замках третьей, шестой, девятой, двенадцатой и т. д. камер. Еще один — в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ключ в замке сотой камеры.
Наконец наступил день рождения и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил царь Дадон?
б) Назовите 10 первых натуральных чисел, имеющих нечетное число делителей (делителем считается и 1, и само число).
в) Сформулируйте и докажите общее правило.

72. КОМБИНАТОРИКА

Я мог бы их пересчитать,
Но мне не дали дописать.

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

754. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?

755. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

РЕШЕНИЕ. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, есть 11·10=110 разных вариантов выбора.

а)

КРОНА
РОНА
ОНА
НА
А

б)

К
КО
КОР
КОРЕ
КОРЕН
КОРЕНЬ

Рис. 155

756. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трех дверей, а за каждой из них ее ожидают четыре двери. Пройдя какую-либо дверь, крыса не может вернуться через нее обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

757. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?

758. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

759. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного короля так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

760. РАННИМ УТРОМ НА РЫБАЛКУ УЛЫБАЮЩИЙСЯ ИГОРЬ МЧАЛСЯ БОСИКОМ. Сколько осмысленных предложений можно составить, вычеркивая некоторые слова этого предложения? (Во все предложения обязательно должны входить подлежащее ИГОРЬ и сказуемое МЧАЛСЯ.)

761. Сколькими способами можно прочитать слово (рис. 155), начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз до последней буквы?

762. В нашем распоряжении есть три разных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается?

763. Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры чисел: а) 133; б) 9854; в) 3213; г) 98 561; д) 32 123?

763. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слов: а) КРОТ; б) МАМА?

Займемся теперь подсчетом числа способов, которыми можно расположить в ряд несколько разных предметов. Такие расположения называются перестановками и играют важную роль в комбинаторике.

764. Сколько существует трехзначных чисел, в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

РЕШЕНИЕ. На первое место можно поставить любую из трех цифр, на второе — любую из двух оставшихся, а на третье — по-

следнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается $3 \cdot 2 = 6$ чисел.

765. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

766. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к театральной кассе?

Рассуждая так же, как при решении трех последних задач, легко понять, что n различных предметов можно выложить в ряд $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ разными способами.

Определение. $n!$ (читается «эн-факториал») — это произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ всех натуральных чисел от 1 до n.

Таким образом, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 5 \cdot 24 = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, ...

767. Вычислите: а) $\frac{100!}{98!}$; б) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Следует иметь в виду, что принято считать $0!$ равным 1. При таком определении формула $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ выполняется и при $n = 0$.

---

768. Сколько существует девятизначных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания?

769. При приготовлении пиццы к сыру добавляются разные компоненты, обеспечивающие тот или иной вкус. В распоряжении Билла имеются перец, лук, грибы, помидоры, морковь и анчоусы, причем все это можно, по его мнению, добавлять к сыру. Сколько типов пиццы может приготовить Билл?

770. Грани куба можно окрасить либо все в белый цвет, либо все в черный, либо некоторые в белый, а некоторые в черный. Сколько существует разных способов окраски? (Два куба считаем окрашенными различно, если их нельзя перепутать, как ни вращай.)

771. Шириной прямоугольника назовем длину наименьшей из его сторон. (Ширина квадрата — длина любой из его сторон.) Сколькими способами можно вырезать из шахматной доски прямоугольник шириной 3? (Разрезы должны идти только по границам клеток.)

772. Сколько имеется трехзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?

773. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

ПОДСКАЗКА. Сначала определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечетны.

774. Каких чисел больше среди первого миллиона: в записи которых есть цифра 7 или в записи которых ее нет?

775. На окружности даны 1987 точек, одна из которых выделена. Рассмотрите всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, которые содержат выделенную точку, или тех, которые ее не содержат?

73. КОЛИЧЕСТВО ДЕЛИТЕЛЕЙ

> Наука не может двигаться по заказу в том или другом направлении: она изучает только то, что в данный момент созрело, для чего выработаны методы исследования.
>
> К. А. Тимирязев

Число $2^6=64$ имеет всего 7 делителей: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Вообще, степень p^n любого простого числа p имеет $n+1$ делителей: $1, p, p^2, \ldots, p^n$. Чтобы уяснить, чему равно количество делителей числа $5000=2^3\cdot 5^4$, самое простое — рассмотреть табличку:

1	2	4	8
5	10	20	40
25	50	100	200
125	250	500	1000
625	1250	2500	5000

Если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, а $a_1, a_2, \ldots a_k$ — натуральные числа, то число

$$n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{a_k}$$

имеет $(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$ различных делителей (считая 1 и n). В самом деле, делители отличаются друг от друга показателями, с которыми входят в их разложения на простые множители числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Число p_i может либо вовсе не войти в разложение делителя, либо войти в него в любой степени от 1 до a_i; всего имеется, стало быть, a_i+1 возможность. Комбинируя эти возможности для различных простых делителей, мы и получим требуемое.

776. Сколько различных делителей имеет число: а) 3^5; б) $3^5\cdot 5$; в) $2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot 5^5$?

777. Натуральное число делится на 12 и имеет 14 различных делителей. Найдите это число.

778. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных натуральных делителей.

779. а) Найдите число, которое делится на 2 и 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и само это число).
б) Докажите, что если в условии пункта а) заменить 14 на 15, то искомое число будет не единственным.

780. Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot2!\cdot3!\cdot\ldots\cdot99!\cdot100!$ один из ста факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

74. ИГРЫ

Все лучшее, что делается нами
весенней созидательной порой,
творится не тяжелыми трудами,
а легкою искрящейся игрой.

И. Губерман

По внешнему виду некоторые задачи-игры покажутся вам задачами для младшеклассников. Между тем для их решения необходимо четко формулировать стратегию и доказывать, что она при любом поведении противника ведет к выигрышу.
Советую сначала просто поиграть в эти игры с товарищем. После этого постарайтесь абсолютно точно изложить решение задачи.

781. Двое по очереди ставят на шахматную доску ладьи (за один ход — одну ладью), чтобы они не били друг друга. (Кто какую ладью поставил, не учитывается. Нельзя ставить ладью даже под бой своей ладьи.) Кто не может поставить ладью, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре — первый или второй?

782. Аня и Таня выписывают 8-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Аня. Может ли Таня добиться, чтобы получившееся число делилось на 9?

783. Играют двое. Первый пишет на доске ненулевую цифру. Второй приписывает справа к ней некоторую цифру. Затем первый приписывает слева к получившемуся числу некоторую цифру. Первый стремится к тому, чтобы получившееся на доске трехзначное число делилось на 11, а второй хочет ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

784. Двое по очереди пишут цифры со старшего разряда по порядку вплоть до младшего. Начинать с нуля нельзя, а остальные цифры — совершенно произвольные. Если число разделится нацело на 11, то победителем объявляется написавший последнюю цифру, а если не разделится, то победителем считается написавший предпоследнюю цифру. Кто выиграет при правильной игре, если всего должно быть написано: а) 6 цифр; б) 7 цифр?

75. ВЫИГРЫШНЫЕ И ПРОИГРЫШНЫЕ ПОЗИЦИИ

Наши дороги — простор и шоссе,
легок житейский завет:
думай, что хочешь,
но делай, как все,
иначе — ров и кювет.

И. Губерман

785. Алеша Попович и Добрыня Никитич воюют с девятиглавым змеем (рис. 156). По очереди богатыри ходят к его пещере и отрубают 1, 2 или 3 головы. Как начавшему бой Алеше обрести славу победителя змея (т. е. отрубить последнюю голову)? А если змей двенадцатиглавый?

Рис. 156

786. В игре «Кто первым назовет число 100»[1] участвуют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Другой прибавляет к названному числу любое целое число от 1 до 9 и называет сумму. К этой сумме первый снова добавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму. Выигрывает тот, кто назовет число 100. Кто выиграет при правильной игре?

787. Ладья стоит на поле a1. За ход разрешается сдвинуть ее на любое число клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?

РЕШЕНИЕ. Выигрышная стратегия есть у второго игрока: каждым ходом он может возвращать ладью на диагональ a1–h8. Первый игрок вынужден будет каждый раз уводить ладью с этой диагонали. Поскольку поле h8 принадлежит диагонали a1–h8, на него сумеет поставить ладью именно второй игрок.

Проанализируем это решение. Мы выделили класс проигрышных позиций – диагональ a1–h8. Все другие начальные позиции – выигрышные. Классы выигрышных и проигрышных позиций обладают следующими свойствами:

- Всякий ход из проигрышной позиции ведет в выигрышную (только выиграет, увы, противник!).
- В любой выигрышной позиции есть ход, который переводит ее в проигрышную позицию.

[1] Эта игра содержится уже в собрании задач по «занимательной» математике, составленном Баше в 1612 г.

788. Двое по очереди берут из кучи камней 1, 2 или 4 камня. Выигравшим считается взявший последние камни. При каком числе камней в куче начинающий может победить, как бы ни играл его партнер?

789. Двое играют на шахматной доске, передвигая по очереди одного короля. Допускаются ходы на одно поле влево, вниз или влево-вниз по диагонали. Выигрывает тот, кому удастся поставить короля на левый нижний угол. При каких начальных положениях короля выиграет начинающий, а при каких — его партнер?

789. Имеются 2 кучи камней. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает взявший последние камни. При каком числе камней в кучах выиграет начинающий?

790. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выиграет при правильной игре?

РЕШЕНИЕ. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Проигрышными позициями являются нечетные числа. Побеждает первый.

791. На доске сначала написано число 1. Чуня прибавляет к нему 3, 5 или 7. К результату Проня должен прибавить 3, 5 или 7 так, чтобы получилось простое число. Затем опять Чуня прибавляет 3, 5 или 7 и т. д. Если Проня не сможет получить простое число, то он проиграет. Если же Проня получит простое число, большее 100, то он выиграет. Кто выиграет при правильной игре?

РЕШЕНИЕ. В первой сотне есть лишь одна тройка последовательных нечетных составных чисел: 91, 93 и 95. Поэтому единственный шанс остановить игру в пределах первой сотни — получить число 88. Чуня может это сделать, называя числа 8, 18, 28, ..., 88. (В самом деле, если Проня прибавит 3, то Чуня прибавит 7; если 5 — то 5; если 7 — то 3.)

792. Играют двое. Первый называет произвольное целое число от 2 до 9. Второй умножает это число на произвольное целое число от 2 до 9. Затем первый умножает результат на любое целое число от 2 до 9 и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит произведение, большее 1000. Кто при правильной игре выиграет — начинающий или его партнер? Каков секрет победы?

793. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперед. Если вначале часовая стрелка указывает на 12, а победителем объявляется тот, после чьего хода она укажет на 6, узнайте, кто победит при правильной игре. (Прежде чем остановиться на цифре 6, стрелка может сделать несколько оборотов.)

794. В одной куче 18 конфет, в другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят на две кучи. Кто не может поделить (если в куче одна конфета), проигрывает. Есть ли у начинающего выигрышная стратегия?

76. СИММЕТРИЯ

— Если сможешь, угадай,
что ответит попугай?
— То и скажет, полагаю,
что вдолбили попугаю!

Б. Заходер. *«ПОПУГАЙ»*

795. Двое по очереди ставят по одному коню на шахматную доску. Нельзя ставить фигуру под бой ранее поставленной (не важно, самим игроком или его противником) фигуры. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

796. Двое по очереди ставят слонов на клетки шахматной доски так, чтобы слоны не били друг друга. (Цвет слонов значения не имеет.) Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков обладает выигрышной стратегией?

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ. Поскольку шахматная доска симметрична относительно своего центра, естественно попробовать симметричную стратегию. Но слона нельзя ставить на центр симметрии доски. Значит, скорее всего, победит второй игрок, создавая каждым своим ходом центрально-симметричную позицию.

Казалось бы, это и есть выигрышная стратегия. Однако, следуя ей, второму игроку не всегда удастся даже один ход! Слон, только что поставленный первым игроком, может оказаться на диагонали и бить центрально-симметричное поле.

Этот пример показывает, что нельзя забывать о следующем обстоятельстве: очередному симметричному ходу может помешать ход, только что сделанный противником. Чтобы решить игру при помощи симметричной стратегии, необходимо найти симметрию, при которой только что сделанный противником ход не препятствует осуществлению избранного плана.

797. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает игрок, переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

798. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки, причем за один раз можно оборвать 1 или 2 соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

799. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели: а) общих сторон; б) общих точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

800. На окружности даны 20 точек. Двое по очереди проводят хорду с концами в этих точках так, чтобы хорды не пересекались. Проигрывает тот, кто не сможет провести хорду. Кто победит при правильной игре?

801. Имеются одинаковые кучи камней. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает взявший последние камни. Кто выиграет при правильной игре, если было: а) 2 кучи камней; б) 3 кучи камней?

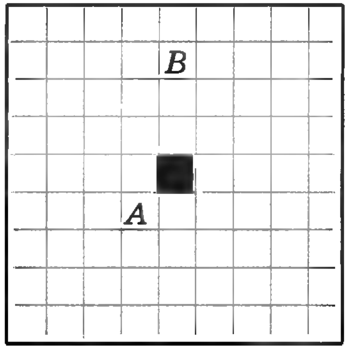


Рис. 157

802. Соты имеют форму квадрата 9×9 (рис. 157). Все квадратики, кроме центрального, заполнены медом. В центре — деготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дегтя. Проигрывает тот, кому остался только деготь. Кто выиграет при правильной игре? А если дёготь находится не в центре, а в клетке *A*, *B*?

77. ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Преимущества десятичной системы не математические, а зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой.

Н. Н. Лузин

По-чукотски глагол «считать» («рылгык») происходит от слова «рылг» – палец и значит, собственно, «пальчить». «Десять» по-чукотски обозначается как «две руки», а слово «двадцать» происходит от слова «человек» – весь человек, т. е. все пальцы на руках и ногах.

Вообще, видимо, сначала у многих народов господствовала не десятичная, а двадцатеричная система. Это отразилось и в строении числительных: например, по-французски 80 обозначается quatre-vingt, т. е. «четырежды 20»,– совсем как по-чукотски.

То же явление мы находим и во многих иранских языках, например у курдов, где 50 обозначается как «дважды 20+10», и в языках германских, кельтских, в албанском, баскском и т. д. У некоторых народов, например в Западной Африке, считают «сороковками»: для них 80 будет «дважды 40». Кстати, слово «сорок» в русском языке резко отличается от других числительных, обозначающих десятки (три×дцать, пять×десят), а чтобы обозначить очень большое число, употребляют старинное выражение «сорок сорокóв». По всей вероятности, это рудимент такой же, как в Африке, системы счета «по сорока».

Очень показательны названия числительных в языках банту — у жителей Южной Африки. Там большой палец правой руки означает «шесть» (счет идет от мизинца левой), указательный — «семь»; чтобы сказать «восемь» и «девять», соответственно употребляются выражения «согни два пальца» и «согни один палец», а «десять» — «все пальцы». Кстати, почему «согни два пальца»? Потому, что если считать с помощью одной правой руки, то при счете от 6 до 9 пальцы поочередно разгибаются: при счете 6 согнуты 4 пальца, при счете 7 — 3 пальца и т. д.

Не все народы и не всегда считают только с помощью пальцев. Иногда для этого пользуются другими частями тела. Например, одно из папуасских племен Новой Гвинеи считает так: мизинец левой руки, безымянный, средний, указательный, большой палец, запястье, локоть, плечо, левая сторона груди, правая сторона груди. Но характерно, что и здесь используется в качестве опоры именно человеческое тело. Лишь в дальнейшем числительные отрываются от этой опоры и начинают употребляться самостоятельно.

803. Число 444...44 не делится на 8 ни при каком количестве четверок. Докажите это.

УКАЗАНИЕ. **Попробуйте делить столбиком или подумайте, что будет, если разделить не на 8, а на 4.**

804. Какое двузначное число от перестановки цифр увеличивается в 4,5 раза?

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49

Рис. 158

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 159

УКАЗАНИЕ. Двузначное число $\overline{xy}=10x+y$ после перестановки цифр превращается в $\overline{yx}=10y+x$. (Черта над буквами проведена, чтобы никто не спутал число, составленное из цифр x, y, с произведением $x \cdot y$.)

805. В виде таблицы выписали нечетные числа от 1 до 49 (рис. 158). Из каждой строки таблицы выбрали по одному числу так, чтобы никакие выбранные числа не стояли в одном столбце. Чему равна сумма выбранных чисел?

806. В таблицу 10×10 записали числа от 1 до 100 по порядку (рис. 159). Затем часть чисел стерли так, чтобы во всех строках и столбцах таблицы осталось ровно по 5 чисел. Найдите сумму оставшихся чисел.

НАВОДЯЩИЙ ВОПРОС. Пусть отметили 10 чисел так, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы ровно одно отмеченное число. Чему равна сумма всех отмеченных чисел?

807. По кругу расставлены цифры 1, 2, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Найдите сумму всех девяти таких трехзначных чисел.

78. К ТРЕХЗНАЧНОМУ ЧИСЛУ ПРИПИСАЛИ ЕГО ЖЕ

808. К трехзначному числу приписали рядом его же (например, 548 548) и разделили получившееся шестизначное число на 13. Частное разделили на 11, а новое частное — на 7. Что получилось?

809. Написали подряд 3 раза двузначное число (например, 59 59 59). Докажите, что полученное число делится на 3, 7, 13 и 37.

810. Докажите, что число, записанное шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13 и 37.

811. Докажите, что если трехзначное число $\overline{xyz}$ делится на 37, то и числа $\overline{yzx}$ и $\overline{zxy}$ делятся на 37.

812. Что больше: 19 941 994·199 519 951 995 или 19 951 995× ×199 419 941 994?

813. Найдите все трехзначные числа, которые в 25 раз больше суммы своих цифр.

813. Какие трехзначные числа в 11 раз больше суммы своих цифр?

814. Трехзначное число начинается цифрой 4. Если ее перенести в конец числа, то получим число, составляющее $\frac{3}{4}$ исходного. Найдите исходное трехзначное число.

815. Какие двузначные числа в сумме с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, дают полный квадрат?

816. В трехзначном числе зачеркнули первую слева цифру, затем полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трехзначное число. Найдите это число.

817. Если в неизвестном числе зачеркнуть крайнюю справа цифру 5, то это число уменьшится на 1994. Найдите это число.

* **818.** Некоторое число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

819. Может ли целое число при зачеркивании первой цифры уменьшиться: а) в 57 раз; б) в 58 раз?

820. Пятизначное число, все цифры которого различны, умножили на 4. В результате получилось число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

821. На каждом километре шоссе между селами Елкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Елкино, а на другой — сколько до Палкино. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр на обеих сторонах таблички равна 13. Каково расстояние от Елкино до Палкино?

822. Дано 300-значное число 112112...112 (число 112 записано 100 раз подряд). Сколько различных 298-значных чисел можно получить из него вычеркиванием двух цифр?

79. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

При подсчете многих объектов удобно группировать их по нескольку штук. Такая группировка облегчает счет. Поскольку удобно считать на пальцах, предметы часто группируют по 5 или по 10 (впрочем, иногда и по 12— вспомните слово «дюжина»; иногда и по 7 – в неделе 7 дней).

В римской системе счисления[1] есть особые знаки: для единицы – I, пяти – V, десяти – X, пятидесяти – L, ста – C, пятисот – D, тысячи – M. Примеры записи чисел в римской системе приведены в таблице. Римская система более или менее пригодна для выполнения операций сложения и вычитания, но совсем не удобна для умножения и деления.

Если в записи положение цифр (знаков) не играет важной роли, то систему счисления называют непозиционной. Непозиционными были системы счисления у древних египтян, греков. У древних вавилонян система счисления вначале тоже была непозиционной, но впоследствии они научились использовать информацию, заключенную в порядке записи цифр, и перешли к позиционной системе счисления. При этом в отличие от используемой нами системы счисления, в которой значение цифры меняется в 10 раз при перемещении на одну позицию, у вавилонян при перемещении знака происходило изменение

[1] Системы счисления — это способы записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций.

Запись чисел в различных системах счисления

Десятичная	Римская	Двоичная	Троичная	Четверичная
1	I	1	1	1
2	II	10	2	2
3	III	11	10	3
4	IV	100	11	10
5	V	101	12	11
6	VI	110	20	12
7	VII	111	21	13
8	VIII	1000	22	20
9	IX	1001	100	21
10	X	1010	101	22
11	XI	1011	102	23
12	XII	1100	110	30
13	XIII	1101	111	31
14	XIV	1110	112	32
15	XV	1111	120	33
16	XVI	10000	121	100
17	XVII	10001	122	101
18	XVIII	10010	200	102
19	XIX	10011	201	103
20	XX	10100	202	110
21	XXI	10101	210	111
22	XXII	10110	211	112
28	XXVIII	11100	1001	130
48	XLVIII	110000	1210	300
101	CI	1100101	10202	1211
151	CLI	10010111	12121	2113
1966	MCMLXVI	11110101110	2200211	132232
1980	MCMLXXX	11110111100	2201100	132330
1997	MCMXCVII	11111001101	2201222	133031
2000	MM	11111010000	2202002	133100
5000	MMMMM	1001110001000	20212012	1032020

значения числа в 60 раз. Следы вавилонской системы счисления сохранились до наших дней: в часе — 60 минут, в минуте — 60 секунд.

Долгое время в вавилонской системе счисления не было нуля, т. е. знака для «пропущенного» разряда. В IX в. появился особый знак для нуля. Десятичная система распространилась по всему миру.

Например, записывая 2653, мы имеем в виду число $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. Особая роль отводится числу десять: все числа представляются в виде суммы различных степеней десяти с коэффициентами, принимающими значения от 0 до 9. Поэтому эта система и называется десятичной.

А что будет, если вместо десяти использовать какое-нибудь другое число, например шесть? По аналогии нам потребуется шесть цифр-символов. В качестве их мы можем взять знакомые нам символы 0, 1, 2, 3, 4, 5, которые будут обозначать числа от нуля до пяти. Число шесть мы примем за единицу следующего разряда, и поэтому в нашей новой системе счисления оно будет записываться так: 10. Продолжая аналогию, мы можем представить любое натуральное число в виде суммы различных степеней шестерки с коэффициентами от нуля до пяти. Например: $7=1\cdot6^1+1\cdot6^0$, $45=1\cdot6^2+1\cdot6^1+3\cdot6^0$.

Поэтому в новой системе счисления, которая называется шестеричной, естественно записывать число 7_{10} как 11_6, 45_{10} как 113_6 (индекс у числа означает, что это число записано в данной системе счисления).

Нетрудно понять, что в шестеричной системе счисления можно записать любое натуральное число. Покажем, как это сделать для числа 450_{10}. Наибольшее число, являющееся степенью шестерки и не превосходящее 450,— это 216. Разделим 450 на 216 с остатком:

$$450=2\cdot216+18.$$

Неполное частное равно 2. Поэтому первой цифрой шестеричной записи числа 450 будет 2.

Остаток от деления равен 18. Разделим его на предыдущую степень шестерки (на первом этапе мы делили на 6^3, а теперь — на 6^2), с остатком: $18=0\cdot36+18$. Неполное частное равно нулю, поэтому вторая цифра — 0. Остаток равен 18.

Разделим с остатком 18 на 6^1: $18=3\cdot6+0$. Значит, третья цифра равна 3, а остаток — 0. Таким образом, последняя цифра равна 0. Итак, $450_{10}=2030_6$.

При построении новой системы счисления мы не пользовались никакими специфическими свойствами числа 6. Аналогично по любому натуральному числу n, большему 1, можно построить n-ичную систему счисления, в которой запись числа связана с его разложением по степеням числа n.

Еще в XVII в. немецкий математик Лейбниц предложил перейти на двоичную систему счисления, но этому помешала не только традиция, но и то, что в двоичной системе счисления запись чисел слишком длинна. Например: $106=1101010_2$. Однако в XX в., когда были созданы компьютеры, оказалось, что для выполнения арифметических операций на машинах самой удобной является именно двоичная система счисления.

Удобным компромиссом между человеком и машиной являются шестнадцатеричная и восьмеричная системы счисления. Дело в том, что очень легко переводить числа из двоичной системы в любую из них, а по краткости записи восьмеричная система почти такая же, как десятичная, а шестнадцатеричная даже короче.

823. Сколько цифр необходимо иметь: а) в двоичной системе счисления; б) n-ичной системе счисления?

824. Запишите в десятичной системе счисления числа 10101_2, 10101_3, 211_4, 126_7, 158_{11}.

825. Запишите число 100_{10} в двоичной, троичной, четверичной, пятеричной, шестеричной, семеричной, восьмеричной и девятеричной системах счисления.

826. Запишите число 111_{10} в одиннадцатеричной системе счисления (в качестве недостающей цифры 10 принято использовать букву A).

827. Запишите число 1110100111_2 в шестнадцатеричной системе счисления (в качестве недостающих цифр от 10 до 15 принято использовать буквы A, B, C, D, E, F).

828. Переведите число 10010111001101_2 из двоичной в восьмеричную систему счисления.

Операции над натуральными числами в n-ичной системе счисления выполняются в обычном порядке, с той лишь разницей, что для каждой системы счисления надо брать свои таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы счисления таблицы таковы:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

829. Составьте таблицы сложения и умножения для систем счисления: а) четверичной; б) пятеричной ; в) пятнадцатеричной.

830. Вычислите: а) 1100_2+1101_2; б) $201_3 \cdot 102_3$.

80. ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В двоичной системе счисления таблицы сложения и умножения удивительно просты:

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & 0\cdot 0=0 \\ 0+1=1 & 0\cdot 1=0 \\ 1+1=10 & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

Пользуясь этими таблицами, легко складывать и вычитать:

$$+\begin{array}{r} 10 \\ 11 \\ \hline 101; \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ \hline 1100; \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ \hline 10; \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 110110011 \\ 10111 \\ \hline 111001010. \end{array}$$

Эти примеры в десятичной системе выглядят следующим образом:

$2+3=5$; $7+5=12$; $5-3=2$; $435+23=458$.

Умножать в двоичной системе еще приятнее:

$$\times\begin{array}{r} 11101 \\ 101 \\ \hline 11101 \\ 11101 \\ \hline 10010001; \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 10111011 \\ 1100101 \\ \hline 10111011 \\ 10111011 \\ 10111011 \\ 10111011 \\ \hline 100100111000111; \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 11011 \\ 1101 \\ \hline 11011 \\ 11011 \\ 11011 \\ \hline 101011111. \end{array}$$

В десятичной системе эти примеры выглядят так:

$29\cdot5=145$; $187\cdot101=18\,887$; $27\cdot13=351$.

В двоичной системе можно записывать не только целые числа. Например, двоичная запись 101,1010111 в десятичную систему переводится следующим образом:

$$4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=5{,}6796875.$$

831. Сначала выполните действия в десятичной системе, затем переведите числа в двоичную систему, выполните в ней те же действия, ответ переведите в десятичную систему: а) $20+40$; б) $1998+23$; в) $23\cdot34\,534$; г) $460\cdot20$.

832. Замените звездочки цифрами, чтобы получились правильные примеры действий в двоичной системе счисления:

$$\text{а)}\ +\begin{array}{r} 10110* \\ 1*100 \\ \hline 1000*01; \end{array} \qquad \text{б)}\ \times\begin{array}{r} 11*1 \\ 110 \\ \hline 1**1 \\ 1101 \\ \hline 10*111*; \end{array} \qquad \text{в)}\ -\begin{array}{r} 11*1*1*0*00 \\ 1000110 \\ \hline 1111010111*. \end{array}$$

833. а) Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися отрезками, чтобы каждая точка была соединена отрезками ровно с четырьмя другими.

б) Выполните те же условия для 8 точек.

834. На рисунке 160 непересекающимися отрезками 16 точек соединены так, что из каждой точки выходит 5 отрезков. Расположите 12 точек и соедините некоторые из них отрезками так, чтобы 9 точек лежали внутри треугольника с вершинами в трех других точках, этот треугольник был бы разбит на треугольники и каждая точка была бы соединена ровно с пятью другими.

835. В 6 клетках таблицы 4×4 стоят звездочки. Докажите, что можно вычеркнуть 2 строки и 2 столбца, не оставив ни одной звездочки. А если звездочек 7?

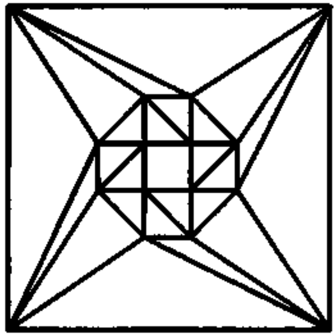


Рис. 160

836. a и b — натуральные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:
1) $a+1$ делится на b,
2) $a=2b+5$,
3) $a+b$ делится на 3,
4) $a+7b$ — простое число —
три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары a, b.

837. Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными:
1) Джо ловкач,
2) Джо не везет,
3) Джо везет, но он не ловкач,
4) если Джо ловкач, то ему не везет,
5) Джо ловок тогда и только тогда, когда ему везет,
6) либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно?

838. На шахматной доске расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали, как и на любой вертикали, стоит не менее двух фигур.
а) Всегда ли можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой вертикали и на каждой горизонтали осталось ровно по одной фигуре?
б) А если в начале на каждой вертикали и на каждой горизонтали стоят ровно две фигуры?

839. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и в 1 рубль. Известно, что сумму в m копеек можно уплатить n монетами. Докажите, что сумму в n рублей можно уплатить m монетами.

81. ДЕЛИМОСТЬ

Как известно, множество $\mathbf{Z}$ целых чисел состоит из натуральных чисел 1, 2, 3, нуля и отрицательных целых чисел −1, −2, −3,

Если a и b — целые числа, то их сумма, разность и произведение — целые числа. Однако деление (действие, обратное умножению) выполнимо в $\mathbf{Z}$ не всегда.

Определение. Целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число k, что $a=kb$.

Например, 54 делится на 6, так как $54=9\cdot 6$; 273 делится на 21, так как $273=13\cdot 21$. Из определения делимости следует, что число 0 делится на любое число, включая 0, но ни одно целое число, отличное от нуля, на нуль не делится[1].

Делимость a на b иногда выражают синонимами: a кратно b, b — делитель a. Для обозначения делимости a на b пишут: $a \vdots b$ или $b \mid a$. Всякое целое число a делится на a, $-a$, 1, -1. Если a — простое число, то никаких других делителей оно не имеет.

840. **Если целые числа a и b делятся на целое число m, то и сумма $a+b$ делится на m. Докажите это.**

РЕШЕНИЕ. По определению делимости существуют такие целые числа k и l, что $a=km$, $b=lm$. Имеем:

$$a+b=km+lm=(k+l)m.$$

841. **Если целые числа a и b делятся на целое число m, то и разность $a-b$ делится на m. Докажите это.**

842. **Если сумма нескольких слагаемых делится на m и известно, что все слагаемые, кроме одного, делятся на m, то и оставшееся слагаемое делится на m. Докажите это.**

* **843.** **Если $3a+4b+5c$ делится на 11 при некоторых целых a, b и c, то $9a+b+4c$ делится на 11 (при тех же значениях a, b и c).**

Зная разложения натуральных чисел a и b на простые множители, легко выяснить, делится ли a на b. Для того чтобы число a было кратным числа b, необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение b, входил и в разложение числа a, причем если простой множитель встречается k раз в разложении числа b, то он должен встретиться не менее k раз и в разложении числа a.

Натуральные числа m и n называются взаимно простыми, если единственным их общим делителем является число 1. Другими словами, натуральные числа m и n взаимно просты, если число n не делится ни на один из простых делителей числа m.

844. **а) Некоторое число делится на 2 и на 3. Обязательно ли оно делится на 6?**

б) Верно ли, что если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15?

в) Всякое ли кратное числа 15 делится нацело и на 3, и на 5?

г) Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?

---

[1] **Да, по этому определению нуль — единственное целое число, которое делится нацело на 0 (хотя чему равно частное, я не знаю и не хочу знать). Впрочем, многие во избежание схоластических споров вообще запрещают спрашивать, какие числа делятся на 0. Они просто говорят, что делить на нуль нельзя. И правильно делают!**

82. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

845. На доске написано: 5*726. Замените звездочку цифрой так, чтобы получившееся число делилось на 3.

РЕШЕНИЕ. Обозначим искомую цифру буквой x. Тогда:

$$5*726=50000+x\cdot1000+700+20+6=$$
$$=5\cdot(9999+1)+x\cdot(999+1)+7\cdot(99+1)+2\cdot(9+1)+6=$$
$$=(5\cdot9999+x\cdot999+7\cdot99+2\cdot9)+(5+x+7+2+6).$$

Все слагаемые первой скобки нацело делятся на 3. Значит, сумма

$$5+x+7+2+6$$

должна делиться на 3. Подходят цифры $x=1$, 4 и 7.

В общем случае таким же образом можно доказать, что при делении на 3 натуральное число дает такой же остаток, как и сумма его цифр. Из этого получается признак делимости:

- Целое число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3.

Признаки делимости позволяют в некоторых случаях быстро установить, делится ли одно число на другое, не прибегая к непосредственному делению уголком. Среди этих признаков наиболее удобны следующие (связанные с записью числа в десятичной системе):

- Целое число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна.
- Целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя последними цифрами этого числа, делится на 4.
- Целое число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.
- Целое число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя последними цифрами этого числа, делится на 8.
- Целое число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 9.

846. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

УКАЗАНИЕ. Признак делимости на 15 очень прост: число делится на 15 в том и только в том случае, когда оно делится на 3 и на 5.

846. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

847. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

848. Замените звездочки в записи числа 72*3* цифрами так, чтобы это число делилось без остатка на 45.

83. ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 9

Как известно, $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$. Значит, при делении на 9 степени числа 10 дают остаток 1.

Теорема. Натуральное число при делении на 9 дает такой же остаток, как и сумма его цифр.

Доказательство (на примере пятизначных чисел):

$\overline{abcde}=a\cdot 10\,000+b\cdot 1000+c\cdot 100+d\cdot 10+e=$
$=a\cdot(9999+1)+b\cdot(999+1)+c\cdot(99+1)+d\cdot(9+1)+e=$
$=(a\cdot 9999+b\cdot 999+c\cdot 99+d\cdot 9)+(a+b+c+d+e)$.

Все слагаемые первой скобки кратны 9. Во второй скобке – как раз сумма цифр.

849. Число 82** делится на 90. Найдите делимое.

850. К числу 13 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 36.

851. В стране Анчурии в обращении имеются купюры следующих достоинств: 1 анчур, 10 анчуров, 100 анчуров, 1000 анчуров. Можно ли отсчитать миллион анчуров так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

852. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

853. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?

854. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется после умножения их на 2, на 3, ..., на 9.

855. К числу прибавили сумму его цифр. К получившемуся числу прибавили сумму его цифр и т. д. Когда в седьмой раз к числу прибавили сумму его цифр, получили 1000. С какого числа начали?

856. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Подсчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова подсчитал сумму цифр и т. д. В конце концов получилось однозначное число. Какое?

857. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитаем сумму его цифр. У каждого из получившихся чисел снова сложим все цифры. Так будем действовать до тех пор, пока не получим миллиард однозначных чисел. Каких чисел окажется больше всего?

858. Записав подряд цифры от 1 до 9, получим девятизначное число: 123 456 789. Простое это число или составное? Если в этом числе изменить порядок цифр, изменится ли ответ?

859. Сколько цифр в числе 11...11, если оно делится на 999 999 999?

860. Вовочка придумал две новые теоремы:

а) если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27;

б) если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27.
Сможет ли Мария Ивановна доказать эти теоремы?

861. Пусть n — натуральное число. Отбросим его последнюю цифру и прибавим утроенную последнюю цифру. Докажите, что полученное число кратно 29 тогда и только тогда, когда n кратно 29. (Например, числа 8439 и $843+3\cdot 9=870$ оба кратны 29.)

---

862. а) Мюнхгаузен вырезал из бумаги десять карточек и на каждой из них написал по цифре от 0 до 9. Затем он разложил их на столе по две и обнаружил, что получившиеся двузначные числа относятся как 1:2:3:4:5. Не ошибся ли он?
б) Навестив короля, барон хотел позабавить его величество, но не нашел карточку с цифрой 0. Однако он смог разложить карточки так, что новые числа относились как 1:2:3:4:5. Как он этого добился? (Достаточно найти ответ. Доказывать его единственность не обязательно, хотя очень полезно.)

863. Если к некоторому числу прибавить сумму его цифр, то получится 1995. Найдите это число.

864. Сумма цифр числа x равна y, а сумма цифр числа y равна z. Найдите x, если $x+y+z=60$.

865. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Решите уравнения:
а) $x+s(x)=1000000000$; б) $x+s(x)+s(s(x))=1993$;
в) $x+s(x)+s(s(x))+s(s(s(x)))=1993$.

866. Какое четырехзначное число в 83 раза больше своей суммы цифр?

84. ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 11

Чтобы вывести признак делимости на 11, рассмотрим степени числа 10. Ситуация здесь чуть сложнее, чем была при выводе признака делимости на 9:

$$10=10, \qquad 100=99+1,$$
$$1000=990+10, \qquad 10\,000=9999+1,$$
$$100\,000=99990+10, \qquad 1\,000\,000=999999+1.$$

Степени числа 10 при делении на 11 дают попеременно остатки 10 и 1.

Признак делимости на 11. Целое число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа, стоящих на четных местах, и сумма цифр этого числа, стоящих на нечетных местах, дают одинаковые остатки при делении на 11.

Например, чтобы узнать, делится ли на 11 число $\overline{abcde}$, достаточно посчитать $a+c+e$ и $b+d$. Если получим числа, дающие (при делении на 11) один и тот же остаток, то число $\overline{abcde}$ делится на 11, а если разные, то не делится. Как доказать признак делимости? Очень просто (для удобства обозначений рассматриваем пятизначное число):

$$\overline{abcde} = 10000a+1000b+100c+10d+e=$$
$$=9999a+a+990b+10b+99c+c+10d+e=$$
$$=9999a+990b+99c+11b+11d+a+c+e-b-d.$$

Поскольку все числа $9999a$, $990b$, $99c$, $11b$ и $11d$ делятся на 11, все определяется числом $a+c+e-b-d$.

867. Придумайте число, делящееся на 11, в записи которого использованы все десять цифр по одному разу.

868. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными и получил АБ·ВГ=ДДЕЕ. Докажите, что он ошибся.

869. а) Заметьте: числа вида $\overline{aa}$, $\overline{abcabc}$, $\overline{abcdeabcde}$ делятся на 11. Объясните, почему если к произвольному числу, в котором нечетное количество цифр, приписать его же, то получится число, делящееся на 11.

б) Если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то полученное число без остатка делится на 11: например, числа вида $\overline{aa}$, $\overline{abba}$, $\overline{abccba}$ делятся на 11. Докажите это.

---

870. Когда до полного числа десятков не хватило 2 яиц, их пересчитали дюжинами. Осталось 8 яиц. Сколько было яиц, если их было больше 300, но меньше 400?

871. Когда солдаты строились в колонну по 4, по 5 или по 6, каждый раз один оставался лишним, а когда построились в колонну по 7, лишних не осталось. Сколько было солдат?

РЕШЕНИЕ. Обозначим число солдат через $x+1$. Тогда x делится на 4, 5 и 6, т. е. x делится на 60. Числа 61, 121, 181, 241 на 7 не делятся.

Ответ: $301+7\cdot 60n$, где $n=0, 1, 2, \ldots$.

872. Двенадцать налоговых инспекторов напали на Буратино и отобрали у него все богатство — почти 30 000 золотых монет. Стали они делить деньги поровну, но один золотой оказался лишним. Инспекторы передрались из-за того, кому достанется лишний золотой, и ненароком одного убили. Оставшиеся 11 инспекторов стали опять делить богатство поровну, но все повторилось: один золотой оказался лишним, инспекторы передрались, одного убили, опять стали делить богатство поровну, один золотой оказался лишним и т. д. Когда в живых осталось шесть инспекторов, самый умный из них, который все время стоял в стороне и думал, сказал: «Стойте! Дальше все снова будет так же! Отдадим лучше один золотой Буратино, чтобы о нас не говорили, что мы отбираем все подчистую, а остальное разделим поровну». Инспекторы удивились, но в конце концов согласились с его предложением. Прав ли был умный инспектор? Сколько золотых было у Буратино?

873. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, а в другом — 18. Какое число было делителем?

874. При каких натуральных n число $\frac{3n+4}{5}$ целое?

УКАЗАНИЕ. Если $3n+4=5k$, то $3(n+3)=5(k+1)$. Поэтому $n+3$ должно делиться на 5.

85. НОЧЬЮ ОДИН МОРЯК ПРОСНУЛСЯ...

875. Пять моряков собрали на острове мешок орехов и заночевали. Ночью один моряк проснулся и разделил орехи на 5 равных частей. Один орех оказался лишним. Моряк отдал его мартышке, съел свою долю и лег спать. Затем то же проделали остальные моряки, причем никто не знал о действиях предшественников. Утром оставшиеся орехи разделили поровну, причем снова остался один орех для мартышки. Сколько было орехов?

РЕШЕНИЕ. Вся трудность этой задачи в лишних орехах, без них годилось бы любое число, которое можно шесть раз делить без остатка на 5, т. е. любое кратное $5^6=15\,625$. А из-за того, что каждый раз деление происходило с остатком, задачу решить куда труднее.

Найдем число орехов, которое не меняется при описанной операции (делении на 5 частей с выделением ореха обезьяне и съедении одной части). Казалось бы, такого числа нет.

Но, не ограничивая себя натуральными числами и надеясь, что формулы умнее нас, составим уравнение $\frac{4}{5}(x-1)=x$.

Итак, число $x=-4$ могло бы быть решением нашей задачи, но по ее смыслу, конечно, не годится. Зато теперь ясно, как получить ответ: надо к -4 прибавить число, кратное 5^6. Наименьшее возможное натуральное $x=15\,621$.

∗ **876.** Студенты 5 раз сдавали зачет (не сумевшие сдать зачет приходили на следующий день). Каждый раз успешно сдавала зачет треть всех пришедших студентов и еще треть студента. Каково наименьшее возможное число студентов, так и не сдавших зачет?

86. КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ

877. Найдите среди чисел вида $3n+1$ три числа, кратных 5.

878. При делении на 2 число дает остаток 1, а при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?

879. Некоторое четное число при делении на 3 дает в остатке 1. Чему равен остаток от деления этого числа на 6?

880. Остаток от деления некоторого целого числа n на 6 равен 4, а остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления на 30?

881. Какое число при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 5 — остаток 3, а при делении на 7 — остаток 2?

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта задача была известна уже в древнем Китае. Сунь-цзы (между II и VI вв.) и более полно Цинь Цзю-шао (XIII в.) дали изложенное на примерах описание алгоритма решения таких задач. Эта задача есть и в «Книге об абаке» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Пизанского. Подробно алгоритм изложил великий немецкий математик К. Ф. Гаусс в своих «Арифметических исследованиях» (1801 г.).

881. Решите систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

ПОЯСНЕНИЕ. Обозначение $a \equiv b \pmod n$ введено в 1801 г. К. Ф. Гауссом. Эта запись означает, что разность $a-b$ делится на n, т. е. числа a и b дают при делении на n одинаковые остатки.

882. Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то оно разделится нацело на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Кроме того, если к этому числу прибавить 4, то оно разделится нацело на 5, а если от него отнять 5, то оно разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то оно разделится нацело на 6, а если же от нашего числа отнять 6, то оно разделится на 5. И это еще не все: если к этому замечательному числу прибавить 7, то оно разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что же это за число?

883. Найдите все трехзначные числа, которые при делении на 37 дают остаток 2, а при делении на 11 — остаток 5.

884. Придумайте число, которое делится на 11, а при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 дает в остатке 1.

885. Допишите к числу 523 три цифры справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, на 8 и на 9.

886. Какие цифры надо поставить вместо звездочек, чтобы число 517** делилось на 6, 7 и 9?

887. Найдите наименьшее число, которое начинается с цифр 1993 и делится на все числа от 1 до 9.

* **888.** Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат целого числа, большего 1.

УКАЗАНИЕ. Давайте искать такое натуральное число n, что $n \vdots 4$, $(n+1) \vdots 9$, $(n+2) \vdots 25$. (Вместо чисел 4, 9 и 25 можно было взять квадраты любых трех взаимно простых друг с другом чисел.) Мы должны решить систему

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod 4, \\ n \equiv 8 \pmod 9, \\ n \equiv 24 \pmod{25}. \end{cases}$$

Первое сравнение означает, что n можно представить в виде $n=4k$, а второе — что $n=8+9l$, где k и l — целые числа. Но ясно, что если $4k=8+9l$, то l должно делиться на 4. Значит, $l=4m$, где m — целое число. Вместо системы трех сравнений можно записать

$$\begin{cases} n=8+36m, \text{ где } m \in \mathbb{Z}, \\ n \equiv 24 \pmod{25}. \end{cases}$$

Дальше думайте самостоятельно.

839. Найдите числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий: 2, 5, 8, ... и 7, 12, 17,

В последней задаче мы видели, что общие члены арифметических прогрессий образуют арифметическую прогрессию. Разность первой прогрессии равна 3, второй — 5. Разность прогрессии-пересечения 17, 32, 47, равна 15.

Можно указать арифметические прогрессии из натуральных чисел, пересечение которых пусто. Например, поскольку ни одно число не является одновременно четным и нечетным, пусто пересечение прогрессии 2, 4, 6, с прогрессией 1, 3, 5,

Оказывается, если разности m и n двух арифметических прогрессий, члены которых — натуральные числа, являются взаимно простыми числами, то пересечение прогрессий — арифметическая прогрессия (и разность ее равна mn).

Китайская теорема об остатках. Если a и b — целые числа, m, n — взаимно простые натуральные числа, то пересечение арифметической прогрессии a, $a+m$, $a+2m$, с арифметической прогрессией b, $b+n$, $b+2n$, ... — арифметическая прогрессия с разностью mn.

Здесь натуральные числа упоминаются по той только причине, что арифметическая прогрессия «направлена в одну сторону». Если вместо прогрессий рассматривать бесконечные в обе стороны последовательности вида ..., $a-2m$, $a-m$, a, $a+m$, $a+2m$, , в которых соседи отличаются на m, то пересечение такой последовательности (а такие последовательности настолько важны, что получили название «классы вычетов по модулю m») с последовательностью ... , $b-2n$, $b-n$, b, $b+n$, $b+2n$, $b+3n$, будет (при условии НОД$(m, n)=1$) последовательностью того же вида, но с разностью mn (т. е. пересечение класса вычетов по модулю m с классом вычетов по модулю n — класс вычетов по модулю mn).

Другими словами, если знать остаток a от деления целого числа x на m и остаток b от деления числа x на n, то можно, причем единственным образом, найти остаток от деления x на mn.

890. Найдите числа, являющиеся членами и арифметической прогрессии 3, 7, 11, ... , 407, и прогрессии 2, 9, 16, ... , 709.

891. Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 становится точным квадратом, а после умножения на 3 — кубом некоторого натурального числа.

892. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

87. НЕРАВЕНСТВА

Давайте бороться за то, чтобы успеваемость каждого ученика была выше средней!

893. а) Груша тяжелее яблока, а яблоко тяжелее персика. Что тяжелее: груша или персик?
б) Ручка дороже тетради, а карандаш дешевле ручки. Что дороже: карандаш или тетрадь?

894. В четырехэтажном доме Ваня живет выше Пети, но ниже Кати, а Марат живет ниже Пети. Кто на каком этаже живет?

895. 9 одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же книг — 15 рублей с копейками. Сколько стоит книга?

896. 7 карандашей дороже 8 тетрадей. Что дороже: 8 карандашей или 9 тетрадей?

897. 6 карасей тяжелее 10 лещей, но легче 5 окуней; 10 карасей тяжелее 8 окуней. Что тяжелее: 2 карася или 3 леща?

898. Решите ребусы:

```
а)   ***        б)  ****
   ×  **          −  ***
   -----          ------
     ***3              1.
  +*****
   ------
   *****3 ;
```

899. а) Число 5 277 319 168 является пятой степенью некоторого натурального числа. Какого?
б) Из цифр 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8 и 9 составьте число, являющееся шестой степенью некоторого натурального числа.

900. Решите ребус $УЖ^3=ПИТОН$. (Здесь 3 — не буква, а цифра.)

901. Найдите делимое и частное в примере $***5:11=**$.

902. Ира, Таня, Коля и Митя собирали ягоды. Таня собрала ягод больше всех. Ира собрала больше, чем Митя. Верно ли, что девочки собрали ягод больше, чем мальчики?

903. Петя, Вася, Коля и Толя подсчитывали после рыбной ловли свои трофеи. Толя поймал больше, чем Коля. Петя с Васей вместе поймали рыбы столько же, сколько поймали Коля и Толя. Какое место занял каждый из мальчиков по количеству выловленной рыбы?

904. Сумма тринадцати различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.

905. На 1985 карточках были написаны числа 1, 2, ... , 1985. Ватсон отложил в сторону 5 карточек и сообщил Холмсу сумму чисел, написанных на этих карточках. Холмс смог определить, какие карточки были отложены. Что это были за карточки?

906. За какое наименьшее количество ходов можно перевести шахматного коня из левой нижней в правую верхнюю клетку доски размером 100×100?

УКАЗАНИЕ. Занумеруем вертикали доски слева направо числами от 1 до 100. Аналогично занумеруем горизонтали снизу вверх, тоже числами от 1 до 100. За один ход коня сумма номеров горизонтали и вертикали той клетки, в которой он находится, может увеличиться самое большее на 3.

88. РЕБУСЫ

Отправился логик в темный лес и утешал себя тем, что перед ним два выхода: либо он заблудится, либо нет. Заблудился. Ну что ж, думал он, все равно впереди два выхода: либо провалюсь в яму, либо нет. Провалился. Падая вниз, успел подумать, что впереди все равно два выхода: либо сверну себе шею, либо нет. Свернул. Далее он размышлял о том, что и там его ждут два выхода: либо ад, либо рай. Попал он в ад. И снова подумал, что перед ним все еще два выхода: либо съест его черт, либо нет. Съел. И вот тогда остался у него только один выход —

Если в арифметическом равенстве разные цифры заменить разными буквами, а одинаковые — одинаковыми, то получится математический ребус. Решать его можно разными способами. Легче всего попросить компьютер перебрать все варианты. Но этот способ бессмысленный: для того и составлены ребусы, чтобы решать их своей головой; находя способы, перебирать не миллионы и не тысячи, а один-два варианта (впрочем, бывают ребусы, в которых самый быстрый способ решения — перебрать десяток вариантов).

907. Решите ребусы:

а) $\begin{array}{r} \text{КОКА} \\ +\ \text{КОЛА} \\ \hline \text{ВОДА;} \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \text{КОЗА} \\ +\ \text{КОЗА} \\ \hline \text{СТАДО;} \end{array}$ в) $\begin{array}{r} \text{МАГНИЙ} \\ +\ \text{ТАНТАЛ} \\ \hline \text{МЕТАЛЛЫ;} \end{array}$ г) $\begin{array}{r} \text{ПОДАЙ} \\ -\ \text{ВОДЫ} \\ \hline \text{ПАША;} \end{array}$

д) $\begin{array}{r} +\text{ВАЛЕТ} \\ \text{ВАЛЕТ} \\ \hline \text{ТЕАТР;} \end{array}$ е) $\begin{array}{r} +\text{РЮМКА} \\ \text{РЮМКА} \\ \hline \text{АВАРИЯ;} \end{array}$ ж) $\begin{array}{r} +\text{ДРАМА} \\ \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР;} \end{array}$ з) $\begin{array}{r} +\text{АНДРЕЙ} \\ \text{ЖАННА} \\ \hline \text{ДРУЖБА;} \end{array}$

и) $\begin{array}{r} +\text{БАРБОС} \\ \text{БОВИК} \\ \hline \text{СОБАКИ;} \end{array}$ к) $\begin{array}{r} +\text{РЕШИ} \\ \text{ЕСЛИ} \\ \hline \text{СИЛЕН;} \end{array}$ л) $\begin{array}{r} +\text{THIS} \\ \text{IS} \\ \hline \text{EASY;} \end{array}$ м) $\begin{array}{r} +\text{КАФТАН} \\ \text{КАФТАН} \\ \hline \text{ТРИШКА;} \end{array}$

н) $\begin{array}{r} +\text{КРОСС} \\ \text{КРОСС} \\ \hline \text{СПОРТ;} \end{array}$ о) $\begin{array}{r} +\text{ДУРАК} \\ \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА;} \end{array}$ п) $\begin{array}{r} +\text{ОДИН} \\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО.} \end{array}$

907. Решите ребусы:
а) ВАГОН + ВАГОН + ВАГОН = СОСТАВ;
б) ДОСКА + ДОСКА + ДОСКА = ЛОДКА;
в) ЦВЕТОК + ЦВЕТОК + ЦВЕТОК = БУКЕТИК;
г) АТАКА + УДАР + УДАР = НОКАУТ;
д) ДОМНА + ДОМНА + ДОМНА = ЗАВОД;
е) ПАРУС + ПАРУС + ПАРУС + ПАРУС = РЕГАТА;
ж) СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + + СЛОВО = ФРАЗА;
з) КОШКА + КОШКА + КОШКА = СОБАКА;
и) EINS + EINS + EINS + EINS + EINS = FÜNF;
к) EINS + EINS + EINS + EINS = VIER;
л) АИСТ + АИСТ + АИСТ + АИСТ + АИСТ = СТАЯ;
м) АИСТ + АИСТ + АИСТ + АИСТ = СТАЯ;
н) КНИГА + КНИГА + КНИГА = НАУКА;
о) СОТНЯ + СОТНЯ + СОТНЯ = ТРИСТА;
п) АРШИН + АРШИН + АРШИН = САЖЕНЬ.

Прежде чем решать следующий ребус, вспомним, что, например, число 3765 можно записать в виде $3\cdot1000+7\cdot100+6\cdot10+5$ или в виде $37\cdot100+65$. Зашифрованное число МАША можно записать в виде $М\cdot1000+А\cdot100+Ш\cdot10+А=М\cdot1000+А\cdot101+Ш\cdot10$.

908. Решите ребус ЧАЙ : АЙ = 5.

909. Решите ребусы: а) ЛИК · ЛИК = БУБЛИК; б) СУК · СУК = = БАРСУК.

910. Сережа записал некоторое пятизначное число и умножил его на 9. К своему удивлению, он получил в результате число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число записал Сережа?

РЕШЕНИЕ. Поскольку при умножении пятизначного числа на 9 получено число пятизначное, то в исходном числе крайняя слева цифра 1.

Число, полученное после умножения данного числа на 9, оканчивается цифрой 1. Значит, исходное число оканчивается цифрой 9 ($9\cdot 9=81$).

Если бы в разряде тысяч исходного числа стояла цифра 2 (или любая бо́льшая цифра), то произведение было бы слишком большим: $12001\cdot 9>100000$. Значит, в разряде тысяч — цифра 0 или 1. Рассмотрим два случая:

1) $$\begin{array}{r} \times\ 11{*}{*}9 \\ 9 \\ \hline 9{*}{*}11. \end{array}$$

Поскольку $11\cdot 9=99$, вторая цифра произведения (она же — разряд десятков исходного числа) есть 9. Имеем: $11{*}99\cdot 9=99{*}11$.

Так не бывает, первый случай не подходит. (Но не разобрать его было бы ошибкой. Решить ребус — значит не только подобрать какой-нибудь подходящий вариант, но и доказать, что нет никаких других.)

2) $$\begin{array}{r} \times\ 10{*}{*}9 \\ 9 \\ \hline 9{*}{*}01. \end{array}$$

Поскольку $9\times 9=81$, в разряд десятков из разряда единиц переносится 8. Чтобы в разряде десятков произведения оказалась цифра 0, предпоследняя цифра исходного числа должна быть 8. Получаем ответ: $10989\cdot 9=98\,901$.

89. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ

Геометрической прогрессией называют последовательность, каждый следующий член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же число $q\neq 0$. Число q называют знаменателем прогрессии.

Примеры геометрических прогрессий:

- 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,

  Первый член этой геометрической прогрессии равен 2, второй — 4, третий — 8 и т. д. Знаменатель прогрессии равен 2.

  Формула n-го члена этой прогрессии: 2^n. Подставив в эту формулу $n=1$, получим первый член: $2^1=2$. Подставив $n=9$, получим 9-й член: $2^9=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=512$. Для нахождения 100-го члена надо подставить в формулу $n=100$ и вычислить 2^{100} — перемножить 100 двоек.

- $\frac{2}{3}$, 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374,

  Знаменатель равен 3.

- 2, −2, 2, −2, 2, −2, 2 −2, 2,

Знаменатель равен −1.

- $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32},$

  Знаменатель равен $-\frac{1}{2}$.

- 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
  Знаменатель равен 1. Впрочем, иногда бывает необходимо исключить постоянные последовательности из числа геометрических прогрессий, потребовав $q \neq 1$.

911. **Первый член геометрической прогрессии равен 3, знаменатель равен 2. Найдите пятый член прогрессии.**

912. **Третий член геометрической прогрессии равен 27, знаменатель равен $\frac{2}{3}$. Найдите пятый член прогрессии.**

913. **Найдите четыре числа, если первые три из них составляют арифметическую прогрессию, последние три — геометрическую. Известно, что разность арифметической прогрессии равна 4, а знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{4}{3}$.**

914. **Какова будет толщина газетного листа, если его сложить пополам, потом еще раз пополам, еще раз... и так 50 раз[1]?**

РЕШЕНИЕ. Если сложить газету один раз, то она станет вдвое толще. Если сложить два раза, то будет четыре слоя, т. е. 2^2; три раза дадут $8=2^3$ слоев и т. д. Каждое перегибание пополам увеличивает количество слоев вдвое. Значит, после 50 раз получим 2^{50} слоев.

Чтобы упростить счет, заметим, что произведение десяти двоек равно

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2}_{10\ \text{двоек}}=1024>1000=10^3.$$

Значит,

$$2^{50}=2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10}>1000^5=10^{15}.$$

Получилось огромное число — 1 000 000 000 000 000. Теперь надо оценить толщину газетного листа. Толщина стопки из 100 листов примерно равна 1 см. Поэтому 10^{15} листов составят примерно

$$10^{13}\ \text{см}=10^{11}\ \text{м}=10^{8}\ \text{км}=100\,000\,000\ \text{км}.$$

Сто миллионов километров[2]?!

---

[1] Конечно, в какой-то момент газету уже и не согнешь, но в крайнем случае ее можно разрезать. Какова же будет толщина: 10 см? 1 м? 100 м? Или больше? Может, до Венеры хватит?

[2] Среднее расстояние от Земли до Солнца — так называемая астрономическая единица — равно $1{,}496\cdot 10^8$ км.

В этой задаче проявилась и сила, и слабость математики. Сила — в том, что мы не ставили эксперимент с реальной газетой, а заменили его мысленным экспериментом, построили математическую модель и сумели свести дело к заурядным вычислениям. (Математика, заметьте, выступает в двух обличьях: как искусство сводить сложную задачу к более простой и как набор стандартных правил вычислений).

Слабость — в том, что абстракция может увести за пределы реального мира даже в случаях, когда решаются вполне реальные задачи.

915. **Изобретатель шахмат запросил у властелина, восхищенного этой игрой, следующую награду: за первую клетку доски — 1 пшеничное зерно, за вторую — 2, за третью — 4 и т. д., за каждую последующую — в 2 раза больше, чем за предыдущую. Считая, что масса одного зерна равна $\frac{1}{4}$ г, а годовой урожай Земли меньше $5\cdot10^{10}$ т, оцените, за сколько лет можно собрать со всей планеты урожай, необходимый для выплаты причитающейся награды.**

90. СУММА СТЕПЕНЕЙ ДВОЙКИ

То, чем в прежние эпохи занимались лишь зрелые умы ученых мужей, в более поздние времена стало доступно пониманию мальчишек.

Гегель

Суммы вида $1+2+4+\ldots+2^n$ обладают замечательным свойством: если к ним прибавить по единице, то получим степени двойки. Например,

$$\begin{aligned}
1 &= 1=2-1,\\
1+2 &= 3=4-1,\\
1+2+4 &= 7=8-1,\\
1+2+4+8+16+32 &= 63=64-1,\\
1+2+4+\quad+512+1024 &= 2047=2048-1.
\end{aligned}$$

Если перенести -1 из правой части в левую, то сумма «сворачивается». Например,

$$\underbrace{1+1}+2+4+8+16+32+64=\underbrace{2+2}+4+8+16+32+64=$$
$$=\underbrace{4+4}+8+16+32+64=\ldots=\underbrace{64+64}=128.$$

Аналогичным замечательным свойством обладают суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 1 - \frac{1}{64},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \quad + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024} = 1 - \frac{1}{1024}.$$

Эти равенства можно пояснить геометрически. Например, равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

проиллюстрировано рисунком 161.

Итак,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Поскольку величина $\frac{1}{2^n}$ с ростом n стремится к 0, говорят, что сумма бесконечного числа слагаемых (сумма ряда) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \quad$ равна 1.

Если обозначить

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} +$$

то, домножив на 2, получим

$$2x = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} +}_{x}$$

откуда $2x = 1 + x$, т. е. $x = 1$.

Аналогично если обозначить

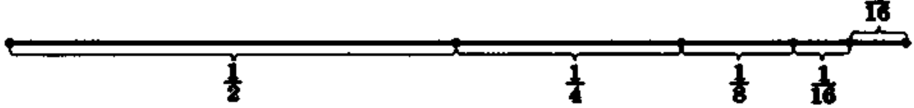
$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} +$$

то получим

$$3y = 1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \ldots}_{y},$$

откуда $3y = 1 + y$, т. е. $y = \frac{1}{2}$.

Рис. 161



916. Найдите:

а) $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{4^n}+\dots$;

б) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\dots+\frac{1}{(-2)^n}+\dots$;

в) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\dots+\frac{1}{(-2)^n}+\dots$

Интересно найти сумму:

$$z=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\dots$$

Как обычно, $10z=1+\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\dots}_{z}$

откуда $10z=1+z$, т. е. $z=\frac{1}{9}$. Поскольку

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\dots=$$

$$=0,1+0,01+0,001+0,0001+0,00001+\dots=0,11111\dots$$

получили замечательный результат: $0,111111\dots=\frac{1}{9}$.

Последнее равенство, заметьте, не приближенное, а точное. Бесконечная десятичная периодическая дробь 0,11111... является в точности тем же самым числом, что и обыкновенная дробь $\frac{1}{9}$.

91. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

После поворота событий от плохого к худшему цикл повторится.

Предсказатель

Перевести обыкновенную дробь в десятичную легко — надо всего лишь делить уголком. При этом получается либо конечная десятичная дробь (когда знаменатель несократимой обыкновенной дроби не делится ни на какие простые числа, кроме 2 и 5), либо периодическая дробь (чисто периодическая — когда знаменатель не делится ни на 2, ни на 5; смешанная периодическая — в остальных случаях).

Что такое периодическая дробь? Это бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого места, периодически повторяется определенная группа цифр. Например, 2,5131313...

Обычно такую дробь записывают короче: 2,5(13), т. е. помещают повторяющуюся группу цифр в скобки и говорят: «13 в периоде»[1].

Если в периодической дроби повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую дробь называют чисто периодической; в противном случае говорят, что десятичная дробь имеет предпериод, и называют дробь смешанной периодической.

Суммирование бесконечно убывающей геометрической прогрессии помогает переводить периодические десятичные дроби в обыкновенные. Например, пусть

$$x = 0{,}1733\ 1733\ 1733\ 1733\ 1733\ldots$$

Тогда

$$10\,000x = 1733{,}1733\ 1733\ 1733\ 1733\ldots$$

откуда

$$10\,000x = 1733 + 0{,}1733\ 1733\ 1733\ 1733\ldots = 1733 + x.$$

Из уравнения

$$10\,000x = 1733 + x$$

находим $9999x = 1733$, т. е. $x = \frac{1733}{9999}$.

Если провести такие вычисления в общем виде, то можно установить правило: чисто периодическая дробь, меньшая 1, равна такой правильной обыкновенной дроби, в числителе которой стоит период, а в знаменателе — число вида 9...9, где цифра 9 написана столько, сколько цифр в периоде.

Например, $0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Теперь нетрудно обратить в обыкновенную дробь любую периодическую дробь. Покажем, как это делается, на примерах:

$$3{,}1(3) = 3 + 0{,}1 + 0{,}0(3) = 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{47}{15};$$

$$1{,}93(173) = 1{,}93 + 0{,}01\cdot 0,(173) = 1{,}93 + \frac{173}{99900}.$$

---

[1] Примером непериодической бесконечной дроби может служить дробь 0,1010010001..., у которой количество нулей между единицами все время увеличивается на 1.

Вычислите:

917. $\dfrac{0{,}1(2)+0{,}3(4)}{0{,}4(5)-0{,}2(3)}$

918. $\dfrac{\left(4{,}5\cdot1\dfrac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot0{,}(6)}{\left(3{,}(3)\cdot0{,}3+0{,}(2)+\dfrac{4}{9}\right):2\dfrac{2}{3}}+\dfrac{1\dfrac{4}{11}\cdot0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\dfrac{3}{40}\right)\cdot1{,}6}.$

919. $\dfrac{0{,}725+0{,}6+\dfrac{7}{40}+0{,}42(6)+0{,}12(3)}{0{,}128\cdot6\dfrac{1}{4}-\left(0{,}0345:\dfrac{3}{25}\right)}\cdot0{,}25.$

920. $\left(16\dfrac{1}{2}-13\dfrac{7}{9}\right)\cdot\dfrac{18}{33}+2{,}2\cdot(0{,}(24)-0{,}(09))+\dfrac{2}{11}.$

921. $\left(\dfrac{15}{24}+\left(3\dfrac{1}{4}:13\right):\dfrac{2}{3}+\left(2\dfrac{5}{18}-\dfrac{17}{36}\right)\cdot\dfrac{18}{65}\right)\cdot\dfrac{0{,}1(6)+0{,}(3)}{0{,}(3)+1{,}1(6)}.$

922. $\dfrac{\left(0{,}3275-\left(2\dfrac{15}{88}+\dfrac{4}{33}\right):12{,}(2)\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}.$

923. $\dfrac{0{,}8(3)-0{,}4(6)}{1\dfrac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\dfrac{3}{4}-0{,}41(6)}{0{,}59}.$

924. $\dfrac{\left(0{,}(6)+\dfrac{1}{3}\right):0{,}25}{0{,}12(3):0{,}0925}+12{,}5\cdot0{,}64.$

925. $\dfrac{\left(\dfrac{5}{8}+2{,}708(3)\right):2{,}5}{(1{,}3+0{,}7(6)+0{,}(36))\cdot\dfrac{110}{401}}\cdot0{,}5.$

926. $\dfrac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}8(9))\cdot\dfrac{1}{12{,}8}}{\left((1{,}2:36)+\left(1\dfrac{1}{5}:0{,}25\right)-1{,}8(3)\right)\cdot1\dfrac{1}{4}}:0{,}125.$

927. $\dfrac{\left(2\dfrac{38}{45}-\dfrac{1}{15}\right):13\dfrac{8}{9}+3\dfrac{3}{65}\cdot0{,}(26)}{\left(18\dfrac{1}{2}-13{,}(7)\right)\cdot\dfrac{1}{85}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{162}\right).$

928. $\dfrac{\dfrac{3}{4}+0{,}1(6)+\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{729}+\dfrac{1}{5832}\right)}{0{,}(3)+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{135}+\dfrac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\dfrac{48}{125}}{12{,}8\cdot0{,}25}.$

92. АХИЛЛЕС И ЧЕРЕПАХА

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить.
Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей
Другой на память мне приводит.
Ведь каждый день над нами Солнце ходит.
Однако ж прав упрямый Галилей.

А. С. Пушкин

929. **Ахиллес бегает вдесятеро быстрее черепахи. Начальное расстояние между ними — 1 км. Пока Ахиллес пробежит 1 км, черепаха продвинется на 100 м. Когда он пробежит эти 100 м, черепаха проползет еще 10 м. Пока Ахиллес пробежит эти 10 м, черепаха проползет еще 1 м, и так без конца — черепаха всегда впереди! Как же так?!**

НАВОДЯЩИЙ ВОПРОС. Какой путь придется пробежать Ахиллесу, чтобы догнать черепаху?

929. **В противоположных сторонах ящика сделаны дырки *А* и *В*. Кролик высовывает голову из *А*, минутой позже — из *В*, затем через полминуты — из *А*, еще через четверть минуты — из *В* и т. д. Не будет ли через две минуты голова кролика торчать одновременно из обеих дырок?**

* **930.** **Часы показывают полдень. Через какое время часовая и минутная стрелки опять совпадут? (Стрелки движутся непрерывно.)**

---

931. **Равнобокая трапеция с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 разбита на четыре одинаковые трапеции (рис. 162). Как видите, верхняя сторона разделена на четыре отрезка. Найдите отношение длин большого и маленького отрезков.**

РЕШЕНИЕ. Верхняя сторона состоит из одного большого и трех маленьких отрезков. Если длину маленького отрезка обозначить через x, то длина большого отрезка будет равна $1-3x$. Поскольку нижняя сторона сложена из трех больших отрезков и одного маленького, составляем уравнение

$$3(1-3x)+x=2,$$

откуда $x=\frac{1}{8}$. Значит, длина большого отрезка равна $\frac{5}{8}$, а отношение большого к маленькому равно 5.

Рис. 162

93. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

932. Решите в целых неотрицательных числах уравнения:

а) $2x-246y=345$; б) $69x-91y=1996$.

933. Решите уравнения в целых числах:

а) $5x+8y=29$; б) $89x-144y=1$;

в) $7x+4y-9z=89$; г) $10x-13y+8z=143$.

934. При каких натуральных n число $8n+3$ делится на 13?

935. Может ли правильная[1] дробь со знаменателем 7 отличаться от правильной дроби со знаменателем 17 меньше чем на 0,01?

935. Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $0<\frac{m}{13}-\frac{n}{8}<0{,}01$? А если 0,01 заменить на 0,005?

94. ВЗВЕШИВАНИЯ

> Чтобы правильно задать вопрос,
> нужно знать большую часть ответа.
>
> Р. Шекли. *«ВЕРНЫЙ ВОПРОС»*

936. Из трех одинаковых по виду колец одно несколько легче других, имеющих одинаковые массы. Как за одно взвешивание найти более легкое кольцо?

937. Как определить вес тела, если коромысла чашечных весов «неправильные», а гири «правильные»?

938. Из четырех деталей одна отличается по весу от остальных, имеющих одинаковый вес. Можно ли выделить ее двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?

939. Из 75 одинаковых по виду колец одно кольцо (мы не знаем, какое именно) по весу отличается от остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах определить, легче или тяжелее это кольцо, чем остальные? (Вы не обязаны находить это кольцо.) А если колец 101?

Если надо угадать задуманное кем-то число за наименьшее число вопросов, а отвечают лишь «да» или «нет», то самое лучшее — всякий раз делить множество, в котором находится число, пополам. Например, если задумано число от 1 до 8, то определить его наверняка можно за 3 вопроса, а быстрее, вообще говоря, нельзя.

[1] Правильная дробь — это дробь вида $\frac{m}{n}$, где m, n — целые числа, $0<m<n$.

940. Разложите по семи кошелькам 127 рублевых монет, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков (другими словами, отдав содержимое одного или нескольких кошельков).

941. За сколько вопросов можно наверняка отгадать целое число, заключенное между 1 и 1000, если на вопросы отвечают только «да» или «нет»?

942. а) Из 9 монет одна фальшивая — более легкая, чем настоящие. Двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь найдите ее.
б) Сколько потребуется взвешиваний для 80 монет?

* **943.** Имеются две красные, две желтые и две зеленые гири. В каждой паре одна из гирь немного легче другой. Все три тяжелые гири весят одинаково. Все три легкие гири тоже весят одинаково. Как определить за два взвешивания на чашечных весах, какая из гирь в каждой паре тяжелее?

944. 68 алмазов различны по весу. За 100 взвешиваний на чашечных весах найдите самый легкий и самый тяжелый алмаз.

945. В гостиницу приехал путешественник. У него была лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки.
а) Какое звено цепочки надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином? (Хозяин может давать сдачу звеньями, полученными им ранее.)
б) Сколько звеньев пришлось бы распилить, если бы путешественник жил в гостинице 100 дней и имел цепочку из 100 звеньев?

946. В 9 мешках все монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном все фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием на точных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивые монеты.

947. Имеются 4 пакета и чашечные весы без гирь. За 5 взвешиваний расположите пакеты по весу.

* **948.** Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Найдите ее за три взвешивания на чашечных весах без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее остальных.

* **949.** На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Суд знает, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково, но фальшивые монеты легче настоящих. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю настоящие. Как он может доказать это за три взвешивания на чашечных весах без гирь?

* **950.** Имеется 6 одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить правильность всех шести надписей?

951. а) На какое наименьшее число частей надо разрезать торт, чтобы его можно было раздать поровну как троим, так и четверым?

б) Сколько комнат должно быть в квартире, куда можно заселить 1, 2, 3 или 4 семьи, разделив жилплощадь поровну между вселяемыми семьями?
в*) Какое наименьшее число гирь (не обязательно одинаковых) может быть разложено и на 3, и на 4, и на 5 куч одинаковой массы?
г*) Какое наименьшее число гирь (не обязательно одинаковых) может быть разложено и на 4, и на 5, и на 6 куч одинаковой массы?

95. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Он пишет a, говорит b, имеет в виду c, а должно быть d.

952. Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, картину, корзину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка вместе. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них — больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

953. Расстояние между пунктами A и B 100 км. Из A в B одновременно выехали два автомобиля. Первый проезжает за 1 ч на 10 км больше второго и прибывает в B на 50 мин раньше его. Определите скорость каждого автомобиля.

954. Машина выезжает из A в B и, доехав до B, тут же возвращается обратно. Через 1 ч машина была на расстоянии 80 км от B, а еще через 3 ч — в 80 км от A. Известно, что на весь путь туда и обратно машина затратила менее 9 ч. Найдите расстояние от A до B.

955. Из села Горюхино выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста на расстоянии 10 км от Горюхино. Когда мотоциклист был на расстоянии 50 км от Горюхино, велосипедист отставал от него уже на 20 км. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

956. Эскалатор спускает идущего по нему вниз человека за 1 мин. Если человек будет идти вниз вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?

957. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту осталось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B?

958. Двум братьям необходимо было попасть на железнодорожную станцию в 5 км от их дома. Если бы они пошли пешком, то опоздали бы на 10 мин. Оставалась лишь одна возможность — использовать единственный велосипед. Оба брата попали на станцию одновременно, за 10 мин до отхода поезда. Как они поступили и за сколько минут до отхода поезда они начали движение, если ходьба пешком втрое медленнее езды на велосипеде? (Ехать на велосипеде вдвоем нельзя.)

959. Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через полтора часа догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

960. Турист поднялся в лодке вверх по реке на 20 км и спустился обратно, затратив на все 10 ч. Путь против течения занял в полтора раза больше времени, чем обратный путь. Найдите скорость течения реки.

961. Расстояние между пристанями A и B по реке 50 км, по шоссе 40 км. Пассажир опоздал к отплытию теплохода из A на 1,5 ч. Он мгновенно сел в такси и примчался в B одновременно с теплоходом. Выяснилось, что скорость такси была на 55 км/ч больше скорости теплохода. Какова скорость теплохода?

962. Теплоход прошел по течению реки 120 км и столько же против течения, затратив на весь путь 8 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 8 км/ч.

963. Два мотоциклиста выехали одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второго мотоциклиста, проехав $\frac{1}{7}$ расстояния от A до B. Найдите расстояние от A до B.

964. Пристань A находится выше по течению реки, чем пристань B. Из A и B одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Достигнув пристани A, моторная лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент времени, когда он проплыл $\frac{2}{3}$ расстояния между A и B. Найдите время, которое затрачивает плот на весь путь из A в B, если катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

965. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, навстречу друг другу движутся два поезда. Если первый поезд выйдет из A на 2 ч раньше, чем второй выйдет из B, то они встретятся на середине пути. За какое время первый поезд проходит расстояние от A до B, если через час после встречи расстояние между поездами будет равно 80 км?

966. Из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, а из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 ч велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Найдите скорость каждого и расстояние от A до B, если пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

967. Расстояние между пунктами A и B равно 60 км, причем $\frac{2}{3}$ дороги приходится на шоссе, а остальная часть — на грунтовую дорогу. Найдите скорость движения автомобиля по грунтовой дороге и по шоссе, если по шоссе скорость его движения на 20 км/ч больше, чем скорость по грунтовой дороге, а на весь путь он затратил всего 2 ч.

968. Уборку урожая начал один комбайн. Через 2 ч к нему присоединился другой комбайн, и после 8 ч работы вместе они собрали 80% урожая. За сколько часов работы мог бы собрать урожай каждый комбайн, если известно, что первому на это необходимо на 5 ч больше, чем второму?

969. Бригаде водителей тяжелых грузовиков сообщили, что им предстоит перевезти груз весом от 170 до 195 т. Два грузовика сломались в пути. Чтобы доставить весь груз, пришлось остальные грузовики догрузить по одной тонне. Сколько тонн груза было перевезено, если все грузовики были одинаково загружены?

969. Для размещения комплекта журналов достаточно купить 18 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок. В результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте?

970. Некто решил накопить деньги на цветной телевизор, который может стоить от 5500 до 6400 р. Для этого он откладывал каждый месяц одну и ту же сумму денег. После того как покупка была сделана, он рассудил, что если бы он откладывал ежемесячно на 50 р. меньше, то копить пришлось бы на 4 месяца дольше. Сколько стоил телевизор?

971. Отец и сын катались по кругу на катке. Время от времени отец обгонял сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает на коньках быстрее сына?

972. Три мухи в полдень сели на секундную, минутную и часовую стрелки часов и поехали на них. Когда какая-то стрелка обгоняла другую, сидящие на этих стрелках мухи менялись местами (а если бы секундная стрелка обогнала часовую и минутную стрелки одновременно, то местами поменялись бы мухи с секундной и часовой). Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?

96. СМЕСИ И СПЛАВЫ

973. В каком отношении следует смешать 6-процентный и 30-процентный растворы поваренной соли, чтобы получить 12-процентный раствор?

974. В три сосуда налито по 1 л смеси кислоты с водой с содержанием кислоты 20, 40 и 70%. Какое наибольшее количество смеси кислоты с водой с содержанием кислоты 50% можно получить, смешивая их?

975. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в этих сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определите, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

976. Имеются два куска сплава серебра и меди. Один из них содержит 81% меди, другой — 95%. В каком отношении нужно брать сплавы от обоих кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий 87% меди?

977. От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определите массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

97. НА ДНЕ ОЗЕРА БЬЮТ КЛЮЧИ ...

978. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

979. *(И. Ньютон.)* 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съели бы траву за 96 дней?

98. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

> ...А что, если Пизанская башня, в сущности, правильно стоит, а это наша Земля со всеми нашими земными делами под ней скособочилась?
>
> Фазиль Искандер

980. Из Стерлитамака в Уфу с интервалом 10 мин выехали со скоростью 30 км/ч два поезда. С какой скоростью двигался поезд из Уфы, если он встретил эти поезда через 4 мин один после другого?

981. Два поезда двигались навстречу друг другу по параллельным путям: первый со скоростью 50 км/ч, а второй со скоростью 70 км/ч. Пассажир второго поезда заметил, что первый поезд прошел мимо него за 6 с. Какова длина первого поезда?

982. Спускаясь по эскалатору, Миша наступил на 50 ступенек, а шагавший втрое быстрее Боря — на 75. Сколько ступенек на эскалаторе?

983. а) От моста пловец поплыл против течения реки, а мяч унесло по течению. Через 20 мин пловец вспомнил о мяче. Догнал он его в 2 км от моста. Какова скорость течения реки?
б) От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B, повернул обратно и встретил плот через 4 ч после выхода из A. Сколько времени катер шел от A до B?
в) От пристани A вниз по течению отправились катер и плот. Катер доплыл до B, повернул обратно, встретил плот через 2 ч после выхода из A, затем доплыл до A, вновь повернул обратно и нагнал плот еще через 2 ч после того, как он его встретил. За какое время проплывет плот расстояние от A до B?

984. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону. В момент, когда велосипедист и пешеход были в одном месте, мотоциклист отставал от них на 6 км. А когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода нагнал мотоциклист?

985. Простак и Хитрец спускались на эскалаторе. Посередине Хитрец сорвал с Простака шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Простак побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься и поднять шапку, а Хитрец — вниз, чтобы потом подняться вверх и опередить Простака. Кто первый схватит шапку, если скорости их относительно эскалатора одинаковы, постоянны и не зависят от направления движения?

986. Как-то раз в одном бассейне взад-вперед стали плавать два пловца. Первый проплывал из одного конца в другой за 11 мин, а второй — за 0,5 ч. Начали они с одного и того же края бассейна. Закончили, когда опять оказались одновременно у одного края бассейна. Сколько за это время произошло обгонов?

* **987.** Рассеянный шел домой вверх вдоль ручья со скоростью, в полтора раза большей скорости течения. Размышляя о чем-то, он бросил в ручей шляпу, но вскоре понял, что ошибся, бросил в ручей палку и побежал назад со скоростью, вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он схватил ее, повернулся и пошел вверх с первоначальной скоростью. Через 10 мин после этого он встретил плывущую по ручью палку. Насколько раньше он пришел бы домой, если бы не заметил свою ошибку?

99. И ВНОВЬ — НЕРАВЕНСТВА

Числовое неравенство может быть верным или неверным; например, неравенства $31>5$, $2^{10}>10^3$, $7\geq 5$, $-1<0$, $4\geq 4$ верны, а неравенства $5>5$, $2\geq 3$ ложны. Неравенство с переменными (т. е. неравенство, содержащее буквы, которые могут принимать разные значения) может при одних значениях переменных быть верным, при других нет. Например, неравенство $x > 1$ выполняется при всех x, которые изображаются на числовой оси точками, расположенными правее, чем 1.

Некоторые неравенства выполнены для всех значений входящих в них переменных. Например, квадрат любого действительного числа неотрицателен: $x^2 \geqslant 0$. Доказать неравенство — значит доказать, что оно выполнено при всех допустимых значениях переменных. Например, докажем неравенство

$$x^2 + 1 \geqslant 2x.$$

Для этого перенесем $2x$ из правой части в левую:

$$x^2 - 2x + 1 \geqslant 0.$$

Как известно, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ Квадрат любого числа неотрицателен!

988. **Докажите неравенства**

а) $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$; **б)** $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.

989. **Докажите, что сумма любого положительного числа и обратного ему числа не меньше 2, т. е.** $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ **при** $a > 0$. **При каких значениях** a **имеет место равенство?**

Решая или доказывая неравенства, мы опираемся на следующие свойства:

- Для любых различных чисел a, b либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$.
- Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
- К обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число: если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c.
- Неравенства можно складывать: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
- Обе части неравенства можно умножить на одно и то же положительное число: если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
- Неравенства можно возводить в степень: если $0 < a < b$ и n — натуральное число, то $a^n < b^n$
- При умножении на -1 знак неравенства меняется на противоположный: если $a > b$, то $-a < -b$. (И вообще если $a < b$, $c < 0$, то $ac > bc$. Это свойство вызывает наибольшее число ошибок у начинающих: они часто забывают изменить знак.)

990. **а) Приведите пример чисел** a, b, **таких, что** $a < b$ **и** $a^2 > b^2$.
б) Может ли так быть: $x > y$ **и при этом** $x^4 = y^4$?
в) Докажите, что неравенства можно возводить в нечетную степень: например, если $a < b$, **то** $a^3 < b^3$.

991. **Перемножили три тысячи двоек. Докажите, что в записи получившегося числа:**
а) не более 1000 цифр; б) не менее 900 цифр.

992. Что больше:
а) 5^{300} или 3^{500}; б) 2^{700} или 5^{300}; в) 2^{300} или 3^{200}?

993. На доске написали 5 чисел. Сложив их попарно, получили числа: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13 и 15. Какие числа на доске?

ПОЯСНЕНИЕ. Из данных пяти чисел a, b, c, d и e можно образовать 10 сумм: $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$ и $d+e$. Но не ясно, в каком именно порядке даны эти числа.

994. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть: а) меньше 0,1; б) больше 110?

* **995.** Представьте число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

996. Известно, что числа A и B таковы, что суммы $A+B$ и $3A+2B$ положительны. Может ли быть отрицательным число $5A+4B$? А число $2A+3B$?

* **997.** Числа 2^{1994} и 5^{1994} выписаны одно за другим. Сколько всего цифр выписано?

* **998.** За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые кружки налито молоко. Один из гномов разлил все свое молоко в кружки остальных поровну. Его сосед справа сделал то же самое, затем следующий сосед справа и т. д. После того как седьмой гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 л. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

100. КАЕМКА

Снежная равнина без предела.
По краям все лес, и лес, и лес.

К. Бальмонт

999. На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить их друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?[1]

1000. Сколько раз потребуется ладье изменить направление движения, чтобы побывать на всех клетках шахматной доски?

1001. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

---

[1] Прямые разделяют точки, если для любых двух этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Не так уж трудно построить серию выводов, в которой каждый последующий простейшим образом вытекает из предыдущего. Если после этого удалить все средние звенья и сообщить слушателю только первое звено и последнее, они произведут ошеломляющее, хотя и ложное впечатление.

Шерлок Холмс

1. 14 и 11. **2.** Если бы оба числа были равны меньшему из них, то их сумма была бы на 22 меньше, т. е. равнялась бы 1106 − 22 = 1084. Следовательно, меньшее число равно половине от 1084, т. е. 542, а большее равно 542 + 22 = 564. **3.** В 3 раза. **4.** Дадим Маше еще 2 шарика. Тогда у нее станет столько же шариков, сколько у Даши. А у Саши 1 шарик заберем — тогда у него станет шариков столько же, сколько у других. Осталось разделить поровну на троих 11 + 2 − 1 = 12 шариков. **6.** См. рис. 163. **9.** 3 сестры и 4 брата. **10.** Мальчики на лодке плывут к другому берегу. Один из них остается там, а другой возвращается. Один солдат переправляется, вылезает, а мальчик возвращает лодку. Таким образом, чтобы переправить одного солдата, лодка 4 раза плывет от берега до берега.

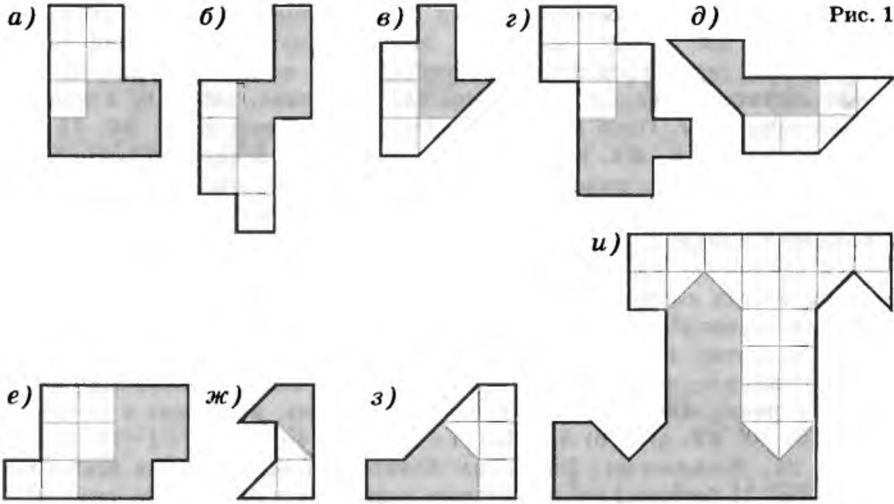
13. Переходят папа и мама	2 мин
Папа с фонариком возвращается	1 мин
Переходят бабушка и малыш	10 мин
Мама с фонариком возвращается	2 мин
Переходят папа и мама	2 мин
Итого	17 мин

14. Могло. Барон и слуга подошли к реке с разных сторон.

16. Обозначим миссионеров буквами М, м, м, каннибалов — К, к, к, причем большими буквами М и К обозначим миссионера и каннибала, умеющих грести.

	Исходный берег	Желанный берег
К перевозит (по очереди) к и к	К Мм	кк
Плывут М, м; М, к возвращаются	Кк Мм	к м
Плывут М, К; возвращаются М, к	кк Мм	К м
Переправляются М, м; возвращается К	Ккк	Ммм
К переправляет к и к		Ккк Ммм

Рис. 163



17. а) Восстановим сначала цифру в последнем столбце (т. е. в разряде единиц). Так как $*+4$ не может быть равно 0, то $*+4=10$. Следовательно, последняя цифра первого слагаемого — 6, и в разряд десятков переносится единица. Поскольку $5+8+1=14$, в разряде десятков суммы стоит 4, а в столбец сотен переносится единица. Тогда $*+1=**$, так что в разряде сотен второго слагаемого стоит цифра 9. Мы нашли ответ: $56+984=1040$; б) $99+9=108$; г) $6750-3894=2856$; и) так как число $*\cdot 2$ оканчивается на 8, то последняя цифра первого сомножителя 4 или 9. Если первый сомножитель равен 29, то $29\cdot *=7*$, чего не может быть ($29\cdot 2=58$, $29\cdot 3=87$). Если же первый сомножитель равен 24, то $24\cdot *=7*$, откуда первая цифра второго сомножителя есть 3. Дальнейшее очевидно;

о) произведение $6*$ на $*$ может быть двузначным числом только в том случае, когда второй сомножитель равен 1. Значит, во второй строке стоит число 111. Поскольку последняя цифра произведения равна 6, то в разряде единиц первого сомножителя стоит 6.

18. Начнем проверять пример. В разряде единиц, а также в разряде десятков все сходится. В разряде сотен $1+8\neq 7$. Значит, хотя бы одна из этих цифр была переставлена с цифрой более старшего разряда. Если это цифра 1, то вместо нее должна была стоять цифра 9. Тогда не сойдется сумма в разряде тысяч. Если это цифра 8, то вместо нее нужна цифра 6, которой вообще нет в примере. Следовательно, надо заменять цифру 7. Поскольку $1+8=9$, а цифра 9 в старших разрядах только одна, то единственный вариант —поменять цифры 7 и 9. После этой перестановки все сходится: $314\,159+271\,828=585\,987$.

19. 35. **20.** 431 и 43. **21.** $1+1999=2000$. **24.** 6.

26. Если за три дня работник получил кафтан, то за 30 дней работы он получил бы 10 кафтанов. С другой стороны, за 30 дней обещаны 9 р. и кафтан. Значит, 9 кафтанов стоили 9 р. Кафтан стоил 1 р.

28. На один раз. **29.** 4 р. **30.** 33 р.

31. Сперва скормим каждому из 10 животных по 5 галет. Останется 6 галет. Но все кошки получили причитающуюся им долю! Значит, 6 оставшихся галет предназначены собакам. А поскольку каждой собаке должно достаться еще по галете, то, следовательно, собак 6, а кошек 4. **36.** Двоеточие. **37.** Одно яблоко отдайте вместе с корзиной. **38.** 15 км/ч.

39. 4 ч. **40.** 6. **41.** Завтракали дед, его сын и внук. **42.** Не больше двух или три (кошка, собака, попугай). **43.** Может: один кошелек внутри другого. **44.** Перелейте воду из второго стакана в пятый. **47.** Лестница поднимается вместе с кораблем. **48.** Разделите по вертикали фигурки пополам и вспомните, как пишут индекс на почтовом конверте. **49.** Министр может вытащить листок бумаги и, не глядя, сжечь его. Поскольку на оставшемся листке написано «Уходите», королю придется признать, что на уничтоженном листке значилось «Останьтесь». **51.** Может. Отец сына — это муж; профессор — женщина. **53.** а) 7; б) 8. **54.** Наша Таня громко плачет, уронила в речку мячик. Тише, Танечка, не плачь, не утонет в речке мяч. **55.** 3. **56.** 10. **57.** а) 2; б) 3. **58.** $(14+14+12+14+10+10)+1=75$ шариков.

59. 21. Указание. Выстроим ботинки парами. Тогда всего будет 20 пар. Взяв 21 ботинок, мы обязательно возьмем два ботинка из какой-то пары, т. е. всю ее целиком.

61. Поскольку Пятачок и Кролик вместе съели 45 бананов, кто-то из них съел не менее 23 бананов. Значит, Винни Пух съел не менее 24 бананов. Пятачок, Кролик и Винни Пух вместе съели не менее 69 бананов. Поскольку ослику Иа-Иа тоже что-то досталось, то Пятачок, Кролик и Винни Пух вместе съели ровно 69 бананов, а ослик — 1 банан.

62. 7. Указание. Если вытащим 8 банок, то это могут оказаться 5 банок малинового и 3 банки вишневого варенья. **63.** См. рис. 164. **65.** Сложите тетраэдр (рис. 165). **67.** См. рис. 166.

71. Да. Если бы число ящиков с яблоками каждого сорта не превышало 8, то всех ящиков было бы не более $8\cdot 3=24$, а их 25. **72.** 0. Поскольку в этом ребусе 10 различных букв, то встречаются все цифры, включая нуль. На нуль делить нельзя, поэтому множитель 0 — в числителе. **75.** Разбейте все множество целых чисел на 5 классов: в один класс поместите числа, дающие остаток 1 при делении на 5, в другой — числа, дающие остаток 2, в третий — числа, дающие остаток 3, и т. д.

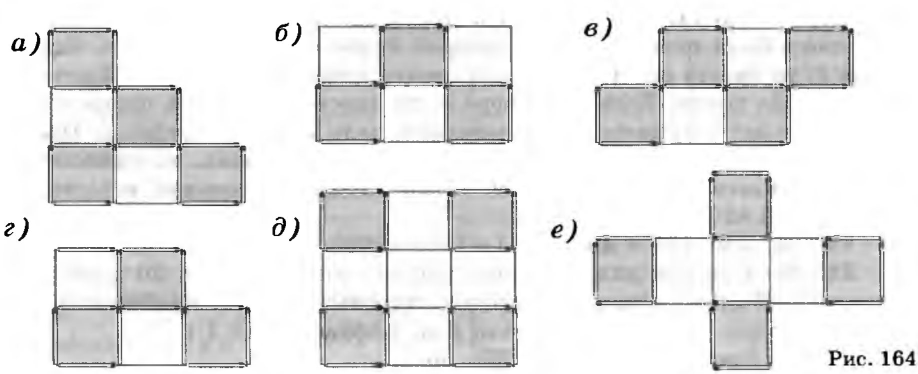


Рис. 164

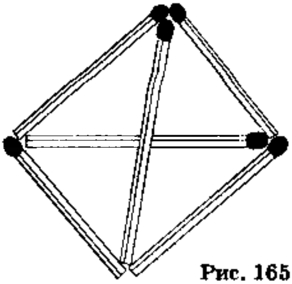
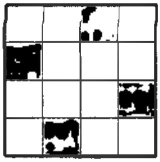


Рис. 165

а)



б)

+	+	+	+
–	–	–	–
–	–	–	–
+	+	+	+

Рис. 166

1	5	1
5		5
1	5	1

Рис. 167

а) б)

Рис. 168

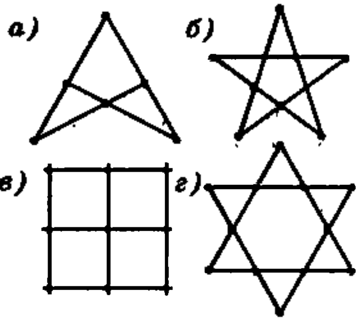


Рис. 169

76. Разбейте все целые числа на n классов в соответствии с тем, какой остаток получается при делении на n. **77.** Указание. Двузначное число записывается двумя одинаковыми цифрами тогда и только тогда, когда оно кратно 11. **78.** Нет. Например, сумма никаких двух из чисел вида $7n+1$, где $n=0, 1, 2, \dots, 99$, не кратна 7.

79. 41312432. **81.** В 5 раз. **82.** После 7 дней, ибо последний кусок отрезать не надо. **84.** Можно, если расковать одну цепь целиком (3 звена).

85. Во вторник следующей недели в 18 ч. В самом деле, за сутки гусеница поднимается вверх на 1 м. Значит, за 8 суток (т. е. к 6 ч утра вторника следующей недели) она окажется на высоте 8 м и к 18 ч покорит вершину! **86.** а) См. рис. 167. **87.** См. рис. 168. **89.** См. рис. 169. **90.** Нарисуйте шестиугольник. Впрочем, два треугольника тоже сгодились бы! **91.** $(999-9):99=10$. **92.** 5 р. Распространенный неправильный ответ — 10 р. Допустим, однако, что у них, скажем, по 50 р. Если Акулина даст 10 р., то у Анфисы окажется 60 р., а у Акулины — 40 р. Следовательно, разница составит не 10, а 20 р. **93.** Пакет молока на 4 р. дороже.

94. 20 р. Купить 5 больших птиц — то же, что купить 10 маленьких. Значит, покупка 5 больших и 3 маленьких птиц равноценна покупке 13 маленьких. Аналогично цена 3 больших и 5 маленьких равна цене 11 маленьких птиц. $13-11=2$, значит, две маленькие птицы стоят 20 р.

95. Дедушке 84 года, внучке 7 лет. **96.** Деду $100-45=55$ лет, сыну $(45-25):2=10$ лет, отцу $10+25=35$ лет.

100. Если собака стоит x р., то корова стоит $4x$, 2 коровы — $8x$, а лошадь — $16x$ р. Чтобы найти x, разделим 200 р. на $1+8+16=25$ частей. Итак, собака стоит 8 р., а корова — 32 р.

103. Три курицы снесли за 3 дня 3 яйца. Следовательно, 3 курицы снесут за 12 дней в 4 раза больше яиц ($3 \cdot 4 = 12$), а 12 кур за 12 дней еще в 4 раза больше, т. е. $12 \cdot 4 = 48$ яиц. **105.** За 2 ч 6 землекопов выроют 6 ям, за 5 ч — в 2,5 раза больше, т. е. 15 ям. **108.** См. рис. 170. **109.** См. рис. 171. **114.** а) См. рис. 172. **116.** См. рис. 173. **117.** См. рис. 174. **118.** Проведите средние линии треугольника.

119. Соедините вершину прямого угла с серединой гипотенузы. Доказать, что получатся именно равнобедренные треугольники, очень просто: прямоугольный треугольник можно достроить до прямоугольника, а диагонали прямоугольника равны и делятся точкой пересечения пополам.

120. См. рис. 175. **121.** См. рис. 176. **122.** См. рис. 177. **125.** Она собрала $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$ яблок. Стражникам досталось $160 - 10 = 150$ яблок. **126.** У лодыря было $((24:2+24):2+24):2=21$ к.

127. Витя съел 4 сливы. Значит, увидел он $4 \cdot 3 = 12$ слив, которые оставил Боря. Значит, Боря съел 6 слив, а увидел 18. Аня съела 9 слив. Всего мама оставила 27 слив. **128.** 127.

129. Любое число от 100 до 109. Разность между числом и суммой его цифр всегда делится на 9. Поэтому все числа, кроме, возможно, исходного,

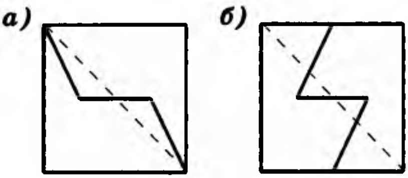


Рис. 170

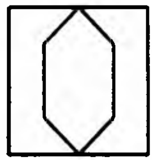


Рис. 171

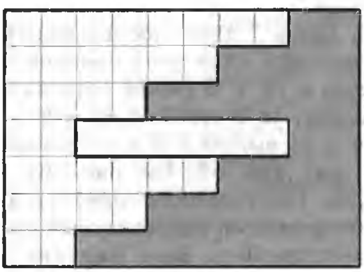


Рис. 172

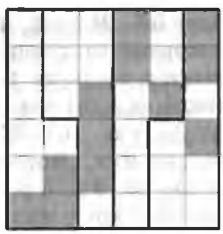


Рис. 173

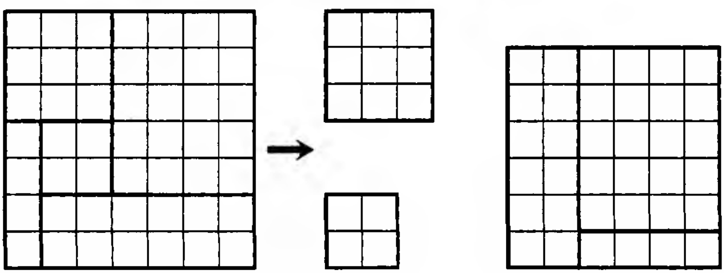


Рис. 174

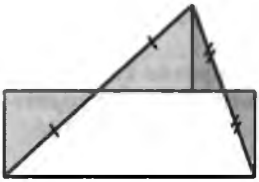


Рис. 175

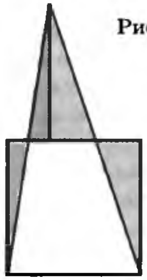


Рис. 176

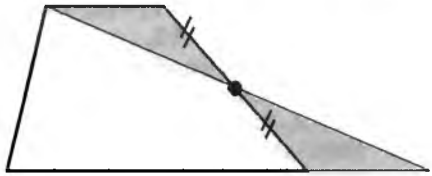


Рис. 177

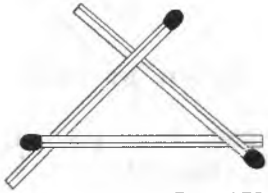


Рис. 178

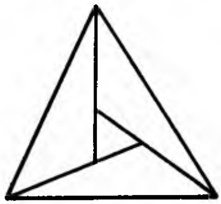


Рис. 179

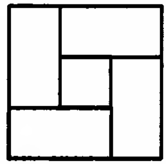


Рис. 180

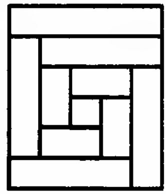


Рис. 181

должны делиться на 9. Следовательно, 0 получился из 9, число 9 получилось из 18, и вообще имеем цепочку: $0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81 \leftarrow ?$.

Здесь нужно быть внимательным: 81 можно получить как из 90, так и из 99. Но 90 ни из какого числа не получишь! А число 99 получается из 100, 101, ..., 109.

130. См. рис. 178. **131.** Да, это возможно (рис. 179). **132.** а) См. рис. 180; б) см. рис. 181. **133.** См. рис. 182. Если вставить седьмой карандаш перпендикулярно остальным шести карандашам, то можно так подобрать размеры, что получим 7 карандашей, касающихся друг друга.

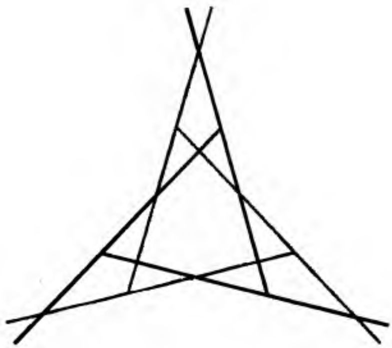


Рис. 182

139. а) $5\cdot5+5:5=26$; б) $(5:5+5)\cdot5=30$; в) $5\cdot5+5\cdot5=50$; г) $55+ +5-5=55$; д) $5\cdot5\cdot5-5=120$; е) $5\cdot5\cdot5+5=130$; ж) $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$; з) $555:5=111$; и) $5:5+5:5=2$. **143.** $1+2+3+4+5+6+7+8\cdot9=100$.

147. Одинаково ценны. 8 сапфиров и 16 топазов стоят столько же, сколько 24 изумруда. Столько же стоят 21 сапфир вместе с тремя топазами. Следовательно, $21-8=13$ сапфиров равноценны $16-3=13$ топазам. Алгебраически это записывают так:

$$\begin{cases} x+2y=3z, \\ 7x+y=8z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+16y=24z, \\ 21x+3y=24z \end{cases} \Rightarrow 8x+16y=21x+3y \Rightarrow 13y=13x.$$

152. 37. **154.** 4 кг и 3 кг. **155.** 13. Указание. Сумма вычитаемого и разности равна уменьшаемому. **156.** 10 и 14 слив. **158.** 120 км. **161.** 30 и 150.

162. Первый способ. Если $a<b<c$ — натуральные числа, сумма любых двух из которых делится на третье, то $a+b<2c$ и $a+b$ делится на c, т. е. $a+b=c$. Поскольку $2a+b=a+c$ делится на b и $2a<2b$, непременно $2a=b$. Значит, $(a, b, c)=(a, 2a, 3a)$, так что $a+2a+3a=186$, откуда $a=31$, $b=2a=62$ и $c=3a=93$.

Второй способ. Если $a+b$ кратно c, то и $a+b+c$ кратно c. Поэтому каждое слагаемое должно быть делителем числа 186. Выпишем все делители: 1, 2, 3, 6, 31, 62, 93 и 186. Теперь ответ очевиден: $31+62+93=186$.

163. а) $216:36=6$; б) $24:2=12$.

164. 6 и 3. Обозначив эти числа буквами x и y, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3(x-y), \\ 2(x+y)=xy. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x=2y$, а тогда из второго уравнения $2(2y+y)=2y\cdot y$, т. е. $3y=y^2$, откуда $y=0$ или $y=3$.

165. а) 9 876 543 210; б) 9 876 543 120. **166.** 1 023 456 798.

167. 19 999 999 999 900. **169.** а) 99 999 785 960. **171.** 163.

175. Метод ясен из таблицы:

	1-я котлета	2-я котлета	3-я котлета
1-я минута	+	+	
2-я минута	+		+
3-я минута		+	+

176. На рисунке 183 изображены три «слоя» куба и расставлены буквы К, Ж и З, обозначающие цвета соответствующих единичных кубиков.

177. Решение изображено на рисунке 184, *а*. Его можно изобрести, если расположить один из блоков в центре, а остальные — в вершинах правильного пятиугольника (рис. 184, *б*).

Интересно, что если блоков $2n$, а цветов $2n-1$, то конструкция аналогична: на рисунке 185 показаны провода одного из цветов для $n=8$; поворачивая эту конструкцию, получаем требуемую раскраску.

178. Пронумеруем борцов в соответствии с их силой числами от 1 до 9. Разумно сначала разбить их на три группы {1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}, а затем в каждую команду направить по одному борцу из каждой группы. Этот путь действительно приводит к успеху: команды {1, 5, 9}, {2, 6, 7} и {3, 4, 8} удовлетворяют требованиям задачи.

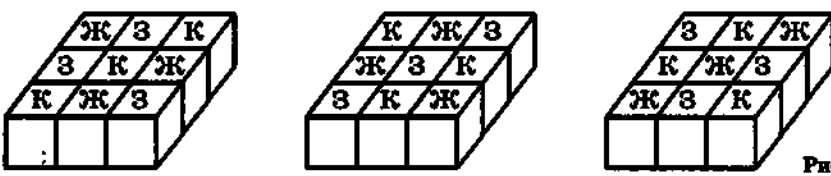


Рис. 183

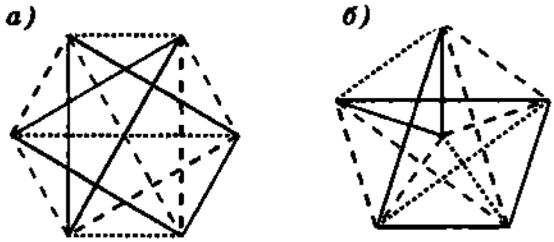


Рис. 184

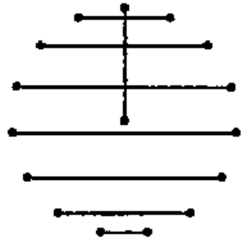


Рис. 185

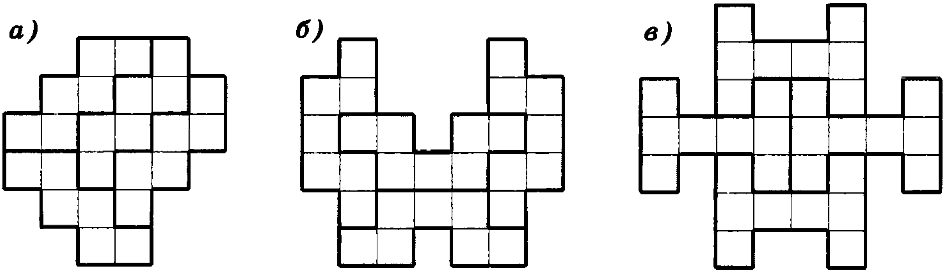


Рис. 186

179. Составьте и решите уравнение $x = 1 + \frac{x}{2}$. **180.** Четверть круга весит 1 кг, круг — 4 кг. **185.** См. рис. 186. **187.** В этой тетради 99 ложных утверждений. **188.** Нет. Кот мог чихнуть просто так или из-за болезни. **189.** Мальчик черноволосый, девочка рыжая. **190.** У Вовы 1000 или 0 книг. **191.** 2 красных, 4 оранжевых, 8 желтых и 9 зеленых шариков. Поскольку красные шарики путал лишь один человек, на самом деле было 2 красных шарика. Следовательно, *C* путал красный с оранжевым. Значит, *C* правильно подсчитал желтые и зеленые шарики. Осталось заметить, что *B* путал желтые и зеленые, следовательно, правильно подсчитал оранжевые.

193. Добрыня Никитич и Алеша Попович сказали одно и то же, поэтому правду сказал Илья Муромец. Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.

197. Если химиков больше, чем алхимиков, то среди 51 опрошенного непременно встретится хотя бы один химик и он скажет правду — что химиков больше. Это противоречит условию. Если алхимиков больше, чем химиков, то хотя бы один из опрошенных — алхимик и он скажет неправду — что химиков больше. Это противоречит условию. Остается единственная возможность — химиков и алхимиков поровну!

198. а) 45; б) 36. **199.** На 50.

201. Первые 9 страниц нумеруем однозначными числами, следующие (от 10 до 99) — двузначными — их 90. Далее, начиная с 100, используем числа трехзначные. Осталось составить уравнение $9 + 90 \cdot 2 + (x - 99) \cdot 3 = 2322$, откуда $x = 810$ — искомое число страниц в книге.

Впрочем, можно обойтись и без уравнения: сначала превратим однозначные числа в двузначные, приписав к каждому по одной цифре. Потом все

99 таких чисел превращаем в трехзначные, добавив к каждому по одной цифре. Теперь все числа стали трехзначными, а количество использованных цифр стало равно $2322+9+99=2430$. Осталось разделить 2430 на 3.

202. 0. **203.** Все патроны следует отдать первому охотнику.

204. Все лепешки стоят $7 \cdot 3 = 21$ к. Значит, лепешка стоит $21:(4+3)=3$ к. Лепешки Петра стоили $3 \cdot 4 = 12$ к., из них 7 к.— стоимость съеденных им лепешек, а остальные 5 к. он должен получить из уплаченных прохожим денег. (Аналогично лепешки Ивана стоили 9 к.; с прохожего он должен получить 2 к.)

205. Старшему брату полагалось $\frac{3}{5}$ дома, а он получил дом целиком. Значит, за $\frac{2}{5}$ дома он отдал 800 р., т. е. $\frac{1}{5}$ дома стоит 400 р., а весь дом — 2000 р.

207. $888+88+8+8+8=1000$. **208.** $555+55+55+55+55+55+55+55+$ $+55+5=1000$. **209.** 8 ч утра. **210.** В 2 раза. **211.** $9453{,}5+9453{,}5=18\,907$. **212.** Всем досталось поровну. **213.** $\frac{1}{3}$. **214.** Могло: $\frac{1}{11}<\frac{2}{21}$.

215. За первые два дня Слава прочел $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ книги, а в третий день — еще $\frac{1}{3}$, тем самым завершив чтение. **216.** Пусть пассажир перестал смотреть в окно за a км до конца пути. Тогда, глядя в окно, он проехал $2a$ км. Половина пути равна $3a$ км, а весь путь — $6a$ км. Следовательно, пассажир смотрел в окно $\frac{2a}{6a}=\frac{1}{3}$ часть пути. **217.** Сложим кусок пополам и еще раз пополам. Получим кусок длиной $\frac{2}{3}:4=\frac{1}{6}$ м, который и надо отрезать, чтобы остаток равнялся $\frac{1}{2}$ м $\left(\text{ибо } \frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\right)$.

219. $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$. Я выпил чашку кофе и чашку молока.

220. г) Первый способ. $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$

Возникает гипотеза, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}$ при всех натуральных n. Докажем ее по индукции. Пусть гипотеза верна для чисел 1, 2, n. Проверим ее для $n+1$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+$ $+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)}=\frac{n^2}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Второй способ. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$.

222. Указание. Умножьте числитель и знаменатель первой дроби на 5.

223. б) 12-й ряд Фарея таков: $\frac{0}{1}<\frac{1}{12}<\frac{1}{11}<\frac{1}{10}<\frac{1}{9}<\frac{1}{8}<\frac{1}{7}<\frac{1}{6}<$

$<\frac{2}{11}<\frac{1}{5}<\frac{2}{9}<\frac{1}{4}<\frac{3}{11}<\frac{2}{7}<\frac{3}{10}<\frac{1}{3}<\frac{4}{11}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}<\frac{5}{12}<\frac{3}{7}<\frac{4}{9}<\frac{5}{11}<\frac{1}{2}<\frac{6}{11}<$
$<\frac{5}{9}<\frac{4}{7}<\frac{7}{12}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{7}{11}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}<\frac{7}{8}<\frac{8}{9}<\frac{9}{10}<\frac{10}{11}<\frac{11}{12}<\frac{1}{1}.$

226. Дроби $\frac{1}{2}\left(=\frac{10}{20}\right)$, $\frac{1}{4}\left(=\frac{5}{20}\right)$ и $\frac{1}{5}\left(=\frac{4}{20}\right)$ составляют в сумме $\frac{19}{20}<1$.

227. а) 0; б) 0. **228.** Можно перейти к уравнению $\frac{2}{73}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292}-\frac{1}{60}=\frac{1}{x}$. Поскольку $219=73\cdot 3$ и $292=73\cdot 4$, легко посчитать величину $\frac{2}{73}-\frac{1}{219}-\frac{1}{292}=\frac{1}{73}\cdot\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{73}\cdot\frac{24-4-3}{12}=\frac{1}{73}\cdot\frac{17}{12}$. Осталось посчитать разность $\frac{17}{73\cdot 12}-\frac{1}{60}=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{17}{73}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{17\cdot 5-73}{73\cdot 5}=\frac{12}{12\cdot 73\cdot 5}=\frac{1}{365}$ и написать ответ: $x=365$.

230. б) $x=\frac{71}{27}$; в) $x=-1$. **Указание.** Разложим 1987:

$$1987=1+2:\left(\frac{1}{993}\right)=1+2:\left(1-\frac{992}{993}\right)=1+2:\left(1+32:\left(-\frac{993}{31}\right)\right)=\ldots .$$

231. $a=-9,\ -7,\ -5$ или -3.

232. Изначально присутствующих было в 6 раз больше, чем отсутствующих, т. е. отсутствующие составляли $\frac{1}{7}$ часть числа всех учащихся. После выхода одного ученика из класса отсутствующие составили $\frac{1}{6}$ часть от общего числа учащихся. Значит, один ученик составляет $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$ часть класса, а в классе 42 ученика.

233. а) В 9 ч угол между стрелками равен 90°. За час часовая стрелка проходит $\frac{1}{12}$ часть окружности, т. е. 30°, а за 20 мин — $\frac{1}{3}$ этого угла, т. е. 10°. Аналогично минутная стрелка, проходящая за час 360°, за 20 мин пройдет 120°. Таким образом, угол 90° уменьшится на 10° и увеличится на 120°, став равным 200°, дополнительный к нему угол будет равен 160°.

234. 36. **236.** Велосипедист прибыл раньше, ибо автомобилист шел пешком столько же времени, сколько велосипедист затратил на весь путь.

239. **Указание.** Поскольку велосипедист проехал треть пути быстрее, чем мотоциклист проехал две трети, его скорость больше половины скорости мотоциклиста. **240.** Один паломник. **241.** Достаточно передвинуть куда-нибудь крайнюю спичку (например, положить ее рядом с другой крайней). **242.** Да, можно бросить мяч вертикально. **243.** Если постараться, из арбуза можно вырезать кусок в виде столбика, идущего сквозь весь арбуз. У этого куска будут две корки, соединенные арбузной мякотью.

245. а) Положите спичку в углу стола, «отрезав» ею треугольник; б) две спички положите в углу стола, чтобы края его дали две другие стороны квадрата. **247.** 3 с. За это время они, конечно, поймут, что им никогда не вырыть такой ямы, да и рыть ее незачем. (Подробности — в сказке Памелы Трэверс «Мэри Поппинс».) **249.** Большой Зеленый Камнеед.

250. Общая сумма расходов торговца составляет 7+9=16 долларов, а его полный доход равен 8+10=18 долларам, что дает 2 доллара прибыли. **251.** У ковбоя в горле застряла кость и от испуга выскочила! **252.** Он гадал: «Любит — не любит...». **253.** 31 121 314. Каждое следующее число описывает предыдущее: «в числе была одна единица» — 11; «две единицы» — 21; «одна единица, одна двойка» — 1112, «три единицы, одна двойка» — 3112 и т. д. **254.** Всегда получится число 6174, которое переходит само в себя. **255.** Например, можно вписать числа так, чтобы каждое число среднего столбца было средним арифметическим двух соседей. **256.** См. рис. 187. **257.** б) См. рис. 188. **258.** 5. **260.** 12. **261.** 22. **262.** 1. **263.** 5. **264.** 0,5. **266.** $1\frac{1}{4}$. **267.** 404. **268.** 2. **269.** 1. **270.** 3. **271.** 8. **272.** 1. **273.** 6. **274.** 3. **275.** 13. **276.** $X=1$. **279.** Указание. $15=(11-7)+11$. Перевернем часы одновременно и через 7 мин начнем варить кашу.

280.

Ведро, 8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
Бидон, 5 л	—	5	2	2	—	5	4	4
Банка, 3 л	—	—	3	—	2	2	3	—

284.

Бочка	a	$a-9$	$a-9$	$a-4$	$a-4$	$a-13$	$a-13$	$a-8$
9-ведерная бочка	—	9	4	4	—	9	8	8
5-ведерная бочка	—	—	5	—	4	4	5	—

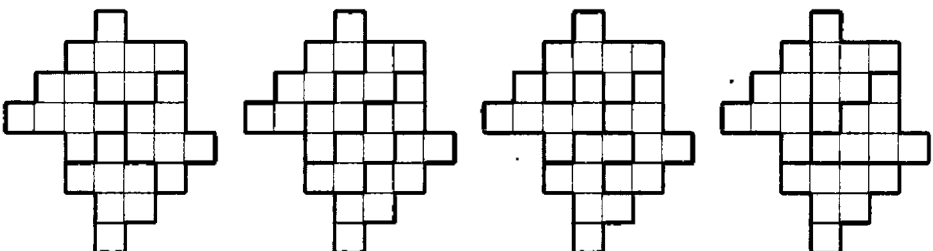


Рис. 187

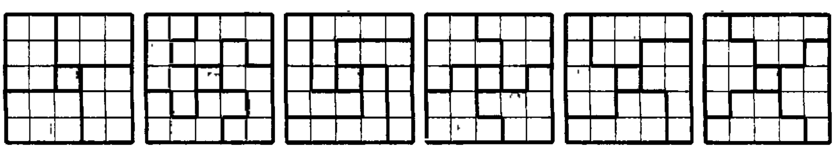


Рис. 188

290. Один рыцарь. **291.** а) Все лжецы; б) либо все лжецы, либо 3 лжеца и 6 рыцарей. **292.** Можно спросить: «Эта дорога ведет в ваш город?» **293.** Например, такой: «Ответили бы утвердительно вы на вопрос: «У вас дома живет ручной крокодил?»

296. В утверждении, что из любых двух министров хоть один продажен, сказано в точности то, что никакие два министра не могут быть честными, т. е. что сразу двух честных министров не найти. Значит, в этом правительстве самое большее один министр честен. Но, согласно условию задачи, один честный министр есть. Стало быть, ровно один честен.

297. Если бы в корзине нашлись 12 груздей, то ни один из них не был бы рыжиком. Поэтому количество груздей не превосходит 11. Если бы груздей было меньше 11, то их было бы не больше 10. В таком случае можно было бы найти 20 не груздей. Значит, груздей ровно 11. Аналогично рыжиков 19. **299.** Правильный ответ — д).

300. Указание. Сначала выясните, какие числа должны быть на рисунке 189 в клетках а, б, в, г. Затем, спросив себя, как можно пройти от 8 к 11, поймите, что на клетке д стоит число 10. Затем узнайте, какие числа должны быть на клетках е, ж, з ... .

17	*г*	*е*		11	*б*
2		*а*	25	*ж*	
23	16	1	*д*	*в*	
30			19		*з*
15		*к*		13	
8				*и*	35

Рис. 189

303. Карточку *А* не надо переворачивать — что бы ни было у нее на обратной стороне, противоречия не будет. Любая другая карточка может (если у нее на обороте четное число) опровергнуть утверждение.

306. 8 кг. **307.** $4:2+3=5=4\cdot2-3$. **308.** Если кафтан стоит x р., то $\frac{7}{12}\cdot(x+12)=x+5$, откуда $x=4{,}8$.

310. 5. **311.** Если x — первое число, y — второе, то первые шесть чисел: x, y, $x+y$, $x+2y$, $2x+3y$ и $3x+5y$. Их сумма $8x+12y=4(2x+3y)=$ $=4\cdot7=28$. **313.** 8 орехов. **315.** Лодка стоит 600 р., товарищи внесли 200, 150, 120 и 130 р.

316. Можно составить и решить систему из четырех уравнений. Есть и более простой способ — обозначить получающееся число через a, составить уравнение $(a-2)+(a+2)+\frac{a}{2}+2a=45$, найти из него $a=10$ и получить ответ — четверку чисел 8, 12, 5, 20.

317. 4 персика, 2 груши и яблоко весят 550 г, персик, 3 груши и 4 яблока — 450 г. Следовательно, 5 персиков, 5 груш и 5 яблок весят 1000 г. Таким образом, персик, груша и яблоко весят вместе 200 г.

319. 49 р. 99 к. **320.** а) Подставив $T_ц=0$, получим $b=32$. При $T_ц=100$ получаем $212=100k+32$, откуда $k=1{,}8$; б) $T=-40°$. **321.** 10. **324.** См. рис. 190. **325.** См. рис. 191. **326.** 2 раза. **327.** $(138:23)\cdot100=$ $=600$ страниц. **328.** $\frac{357}{700}\cdot100=51\%$.

331. Не изменится, ибо сначала цену умножат на 2, а потом разделят на 2. **332.** Указание. $1{,}5\cdot0{,}5=0{,}75$.

335. После снижения цены картофель стал на 4% дешевле. Если цену картофеля до повышения приняли за 100 частей, то после повышения она составила 120 частей, а после снижения на 20% цена уменьшилась на

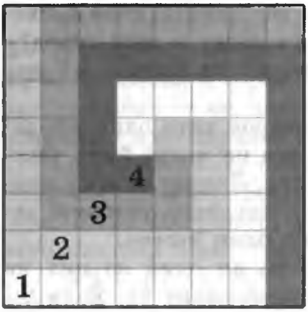


Рис. 190

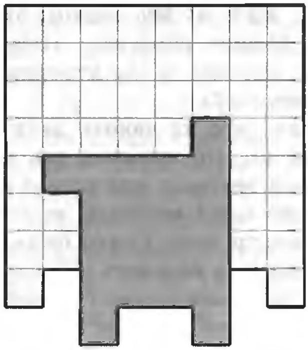


Рис. 191

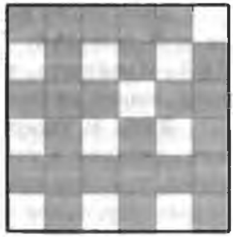


Рис. 192

$120 \cdot \frac{20}{100} = 24$ части и стала равна $120 - 24 = 96$ частям, т. е. составила 96% исходной цены. Вычисления проще было провести так: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$. (Обязательно разберитесь, почему умножить на 1,2 — значит увеличить на 20%, а умножить на 0,8 — значит уменьшить на 20%.)

335. Примем шаг высокого за 1 часть. Тогда шаг низкого составит $\frac{4}{5}$ части. На каждые 100 шагов высокого приходится 120 шагов низкого. За то время, когда высокий пройдет путь в $100 \cdot 1 = 100$ частей, низкий пройдет путь в $120 \cdot \frac{4}{5} = 96$ частей, так что низкий идет медленнее.

336. На каждые 10 м бега бегуна B бегун C отстает от него на 1 м. Поэтому, когда A финишировал, B отставал от A на 10 м, а C отставал от B на 9 м. Значит, C отставал от A на 19 м.

337. Похудел на 2,8%. $0{,}75 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}2 = 0{,}972$.

340. 90%. **341.** На 50%. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик. Значит, Боря собрал в 1,2 раза больше грибов, чем Алик. Поскольку Боря собрал на 20% меньше грибов, чем Вася, значит, Боря собрал 0,8 от собранного Васей количества грибов, т. е. Вася собрал в $1 : 0{,}8 = 1{,}25$ раза больше, чем Боря. Учитывая, что Боря собрал в 1,2 раза больше, чем Алик, заключаем: Вася собрал грибов в $1{,}2 \cdot 1{,}25 = 1{,}5$ раза больше, чем Алик.

342. 15. Из n участников Миша составляет $\frac{100}{n}$%. Если $\frac{100}{n} < 7$, то $n > \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$. **344.** $\frac{1}{12}$. **346.** На 30%. $1 - 0{,}51 = 0{,}49 = 0{,}7 \cdot 0{,}7$.

347. Отливали по 10 л. **348.** На 50%.

349. После первого перехода Джеймсу осталось пройти $\frac{2}{3}$ пути, после второго перехода $\frac{2}{3}$ остатка, т. е. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ пути, а после третьего перехода — $\frac{2}{3}$ нового остатка, т. е. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ всего пути. Отсюда 32 км составляют $\frac{8}{27}$ всего пути, а весь путь равен 108 км.

350. 1000 р. **351.** 72. **352.** Указание. Примем денежку за единицу, стоимость хлеба обозначим через x, а стоимость кваса — через y. Составим уравнения: $x+y=1$ — до повышения цен, $1{,}2(0{,}5x+y)=1$ — после повышения. Значит, $0{,}6x+1{,}2y=1$. Теперь легко найти x и y, а затем посчитать $1{,}2\cdot 1{,}2y$ — стоимость кваса после двух повышений цен.

355. Может (см. рис. 192).

356. а) См. рис. 193. Перечислим основные идеи решения:

1) Отметим начальную и конечную буквы, после чего вычеркнем букву «а» правого верхнего угла.

2) Буква «у» единственная, значит, через нее проходит путь. Отметим ее.

3) Если отмеченная буква имеет только двух соседей, то путь проходит и через этих соседей («вход-выход»).

4) Если буква имеет только одного соседа («тупик»), то путь не может через нее проходить.

5) Если буква отмечена, то другие ее повторения надо вычеркнуть, а если буква осталась только в единственном месте, то ее надо отметить.

357. См. рис. 194.

358. Закрасим сразу целый блок белой, черной, красной, желтой и зеленой красками, как показано на рисунке 195. Поскольку клетка a3 находится на одной вертикали с белой и черной клетками и на одной горизонтали с желтой и зеленой, она не может быть окрашена ни в один из этих цветов и потому должна быть красной. Поскольку в верхнем блоке (точнее говоря, в блоке, образованном клетками b5, c5, d5, c4, d4) должна быть красная клетка, причем не на четвертой, а на пятой горизонтали[1], мы видим, что красной клетке правого верхнего блока[2] некуда деться, кроме как на d2.

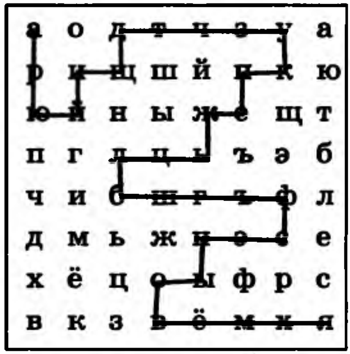


Рис. 193

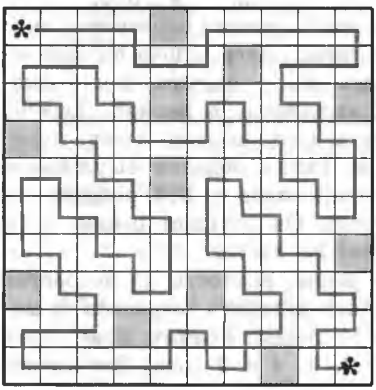


Рис. 194

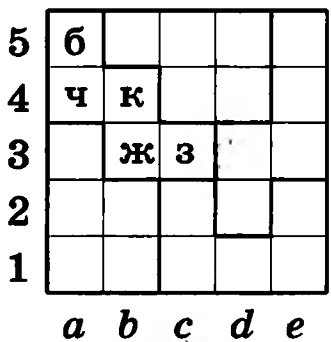


Рис. 195

---

[1] На четвертой горизонтали уже есть красная клетка b4.

[2] Блок состоит из клеток d2, d3, e3, e4, e5.

б	з	к	ч	ж
ч	к	б	ж	з
к	ж	з	б	ч
з	ч	ж	к	б
ж	б	ч	з	к

Рис. 196

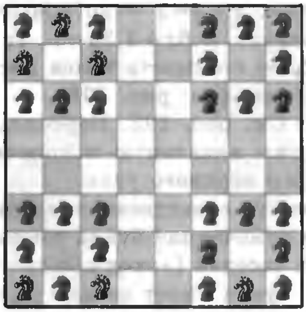


Рис. 197

Значит, красная клетка верхнего блока — это обязательно c5. Для последней, пятой красной клетки доски остается единственное поле — e1.

Теперь займемся черным цветом. В верхнем блоке есть две возможности: b5 и d5. Но, закрасив в черный цвет b5, мы никак не сможем закрасить черным ни одной клетки левого нижнего блока. Значит, черная клетка — не b5, а d5. Цвет клетки b5 теперь тоже можно определить: зеленый, ибо на одной горизонтали цвет клетки e5, и т. д. В конце концов получаем (совершенно однозначно!) ответ (рис. 196).

360. $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

363. То, что 3 и 93 начинаются со слова re, а 37 и 47 — с arwan, указывает, что запись начинается с числа единиц. Значит, re — 3, arwan — 7, ashikne — 5, tu — 2, shine — 1. Словом ikashma единицы отделены от старших разрядов. Очевидно, wan — 10, hotne — 20, tu hotne — 40, wan e — «без десятка». Ответ: wan e re hotne — без десятка трижды двадцать, т. е. 50; 1 — shine, 5 — ashikne, 12 — tu ikashma wan, 53 — re ikashma wan e re hotne, 100 — ashikne hotne, 200 — wan hotne.

364. Очевидно, gangbi — ручка, pingguo — яблоко, ger — песня, zhongwen — китайский язык, hanzi — иероглиф, niunai — молоко, cha — чай, wo — я, ni — ты. Притяжательная форма местоимения образуется прибавлением буквы d, а множественное число — men. Далее, слово bu означает отрицание, chi — есть, he — пить, xie — писать, xue — изучать, kan — смотреть. Приставка hao означает что-то вроде «хорошо», а haokan, haochi, haoxue, haoxie дословно означают: хорошо смотрится, хорошо естся, хорошо (легко) изучается, хорошо (легко) пишется. Таким образом выуживаем глагол ting — слушать. Ответ: Твое яблоко некрасивое — Nid pingguo bu haokan; Вы пишете иероглиф — Nimen xie hanzi; Он слушает песню — Ta ting ger; Их молоко невкусное — Tamend niunai bu hachi.

365. Когда Сережа станет втрое старше Вовы, разность их возрастов будет равна удвоенному возрасту Вовы. Поскольку разность возрастов не меняется со временем, она всегда равна $11 - 1 = 10$ годам. Значит, Вове будет 5 лет, а Сереже — 15. **366.** Возрасты детей: 8, 6, 4 и 2 года. Им вместе $8+6+4+2=20$ лет. Каждый год возраст отца увеличивается на 1 год, а сумма возрастов детей — на 4 года. Через $(35-20):(4-1)=5$ лет отцу исполнится 40 лет, а детям вместе — столько же $(40=13+11+9+7)$.

370. Отцу 40 лет. Пусть сыну x лет. Тогда отцу $4x$ лет. Через 20 лет сыну будет $x+20$, отцу $4x+20$. Значит, $2(x+20)=4x+20$, т. е. $x=10$.

371. Указание. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$, $100:\frac{25}{12}=48$.

372. Сын моложе отца на возраст дочери и по условию на 20 лет. Значит, дочери 20 лет. Следовательно, сыну 40 лет, а отцу 60 лет. **375.** Старшая — Тоня, младшая — Галя. **376.** Они ровесники, им по 6 лет.

382. Обе фигуры не треугольники, а четырехугольники: на глаз излом «гипотенузы» заметить трудно. **383.** См. рис. 197.

384. 60 км/ч = 1 км/мин. Бесконечно быстро двигаться нельзя, выиграть по 1 мин не удастся. **385.** $10:(8-7)=10$. **386.** $40:(45-40)=8$. **387.** $(200-112):22=4$. **390.** 450 кубометров. **393.** 40 км/ч. Указание. Составьте и решите уравнение $10x=8(x+10)$. **394.** Указание. Составьте и решите уравнение $x-7\left(\frac{x}{10}+\frac{x}{12}\right)=136$.

395. 19 км/ч. **396.** Скорость первого автомобиля больше скорости второго в 2,5 раза. Указание. Составьте и решите уравнение $8(x+y)=7(1{,}14x+1{,}15y)$.

399. Указание. Составьте и решите уравнение $\frac{s}{2}:v-\frac{s}{2}:(v+0{,}25v)=0{,}5$.

400. Если бы Петя вышел из дома на 8 мин позже, то он в случае возвращения за ручкой опоздал бы не на 10, а на 18 мин, которые он потратил бы на блуждания из-за ручки. Отсюда следует, что в момент, когда он вспомнил о забытой ручке, он шел уже 9 мин, т. е. прошел $\frac{9}{20}$ пути.

401. Ослик пробегает $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$ моста за время, в течение которого автомобиль проезжает мост. Значит, скорость ослика $60:4=15$ км/ч.

402. По своим ходикам Пух определил, сколько времени отсутствовал. Если из этого времени вычесть время, которое он просидел в гостях (а оно известно), то получится время, потраченное на ходьбу. Разделив его пополам, Пух узнал, сколько времени понадобилось, чтобы добраться домой. Осталось прибавить это время к моменту окончания визита.

403. Птичка съест вдвое больше.

404. За сутки. Разделим копну на 6 одинаковых частей. За сутки лошадь съест 3 части, корова — 2 части, а овца — 1 часть.

405. За сутки три жернова вместе смололи бы $60+54+48=162$ четверти зерна. 81 — это половина от 162, так что потребуется 12 ч.

407. $300:\left(\frac{48}{2}+\frac{129}{6}-8\right)=8$. **409.** 10 мин. **410.** $x:\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)=x:\left(\frac{2}{15}x\right)=\frac{15}{2}=7{,}5$. **411.** 8 ч 45 мин. **412.** 20 дней и 30 дней.

413. В 2,5 раза. Если бы все время копали все трое, то они выкопали бы $1+3\cdot0{,}5=2{,}5$ канавы. **414.** В 1,4 раза быстрее. **415.** За 4 ч.

417. За 40 дней. Указание. Коза и корова, корова и овца вместе с овцой и козой съедят воз за $1:\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{60}+\frac{1}{90}\right)=\frac{180}{4+3+2}=20$ дней.

418. На четверть. Поскольку половина персиков составляла треть объема банки, половина оставшихся персиков составляет шестую часть первоначального объема. Осталось сообразить, какую часть составляет $\frac{1}{6}$ от $\frac{2}{3}$. Для этого достаточно вспомнить, что $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

421. Буквы верхней строки симметричны относительно вертикальной прямой. Буквы следующей строки симметричны относительно горизонтальной прямой. Буквы средней строки несимметричны. Буквы предпоследней строки симметричны как относительно горизонтальной, так и относительно вертикальной прямой. (Каждая из них обладает также центром симметрии. Ничего удивительного в этом нет: легко доказать, что если геометрическая фигура симметрична относительно двух перпендикулярных прямых, то она симметрична и относительно точки пересечения этих прямых.) Буквы нижней строки центрально-симметричны.

422. См. рис. 198. **424.** 8. Указание. Призма имеет не только боковые грани, но и основания.

425. Ребер $13+\frac{22}{2}=24$. Посчитать вершины сложнее. Скорее всего, для этого придется склеить такой многогранник. И тогда вы увидите, что это результат обрезания восьми углов куба треугольными сечениями, проходящими через середины ребер куба. Квадратные грани этого многогранника — это квадраты с вершинами в серединах сторон обрезанного куба. Вершин у него столько же, сколько ребер у куба, т. е. 12.

426. Можно (рис. 199). Указание. Площадь поверхности куба должна быть равна 12 клеткам. Поэтому площадь одной грани куба равна сумме площадей двух клеток. Проще говоря, ребро куба — это диагональ клетки. **427.** См. рис. 200. **428.** ДО, РЕ, МИ. Соседи Д — грани Е, И, М, Р. **429.** См. рис. 118 и 119 к условию задачи 562.

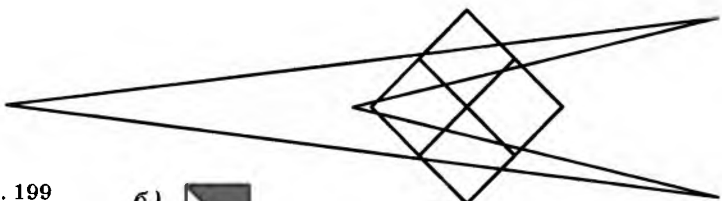


Рис. 198

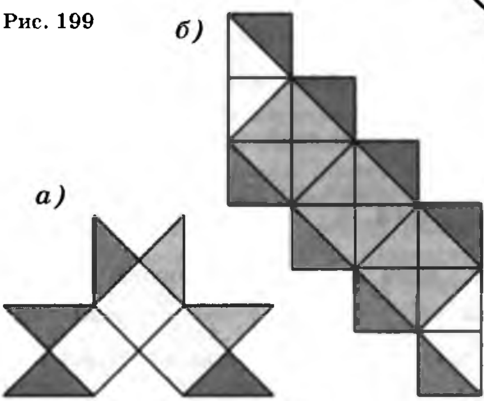
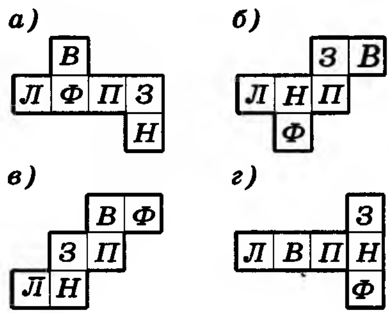


Рис. 199

Рис. 200



432. Пространственная траектория рыбки выглядит, почти как на рисунке 201, а ответ приведен на рисунке 202.

433. Если бы напротив круга был круг, то куб не мог бы выглядеть так, как на средней картинке (ибо из любых двух противоположных граней куба только одна видна на картинке). Значит, на третьей картинке круг находится на левой или нижней грани кубика. Разберем эти два случая:

1. Если круг на левой грани, то единственный способ увидеть одновременно круг, пустую грань и ромбик — посмотреть на кубик третьей картинки снизу слева (двух ромбиков быть не может — в противном случае не найдется места для треугольников). Но при этом по часовой стрелке мы увидим круг, ромбик и белую грань, а должно быть наоборот: круг, белая грань и ромбик.

2. В этом случае, как и в первом, невозможно увидеть первую картинку, если смотреть справа снизу. Значит, на самом деле белая грань, которую мы видим на первой картинке, расположена слева на третьей картинке. Это означает, что напротив белой грани расположена белая грань, внизу третьей картинки — круг, а на задней грани третьей картинки — треугольник.

Развертка изображена на рисунке 203.

438. Если нечетное число 45 045 разложено на целые множители $(x-y)$, x и y, то все эти множители нечетны, ибо нечетное число не может делиться на четное. Но если числа x и y нечетны, то их разность $(x-y)$ четна. **440.** Если 25 р. разменяли на x рублевых, y трехрублевых и z пятирублевых купюр, то можно составить уравнение $x+3y+5z=25$. Условие определения количества купюр написать тоже легко: $x+y+z=10$. Вычитая одно уравнение из другого почленно, получим $2y+4z=15$, что невозможно: левая часть четна, а правая нечетна. **449.** Бобчинский.

455. Поскольку каждым ходом конь переходит с белого поля на черное или с черного на белое, то после четного числа ходов он будет находиться на полях того же цвета, что и исходное, а после нечетного числа ходов — на полях другого цвета. Следовательно, 63-м ходом конь не может попасть на поле, цвет которого совпадает с цветом исходного поля.

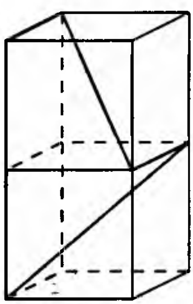


Рис. 201

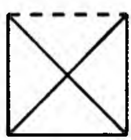


Рис. 202

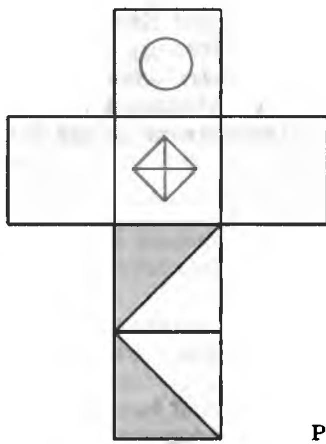


Рис. 203

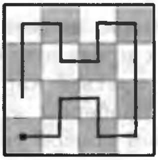
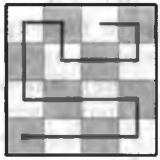
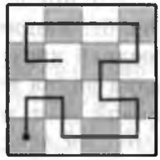
а)  б)  в) 

Рис. 204

456. На рисунке к условию задачи и на рисунке 204 показано, как фишка может достичь четырех белых клеток. Для нахождения путей на остальные белые клетки воспользуйтесь тем, что шахматная доска симметрична относительно диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним углом.

457. Указание. 8 вершин куба и 6 центров граней должны чередоваться.

459. б) Нетрудно подсчитать, что черных полей на доске меньше, чем белых. Если мы начнем обход с черного поля, то получим чередование полей ч—б—ч—б—... . В такой цепочке черных полей не меньше, чем белых, поэтому обойти все черные поля таким образом нельзя.

460. Нет. Указание. Разбейте все 22 города на две группы из 10 и 12 городов так, чтобы при любом обходе города из разных групп чередовались между собой.

463. а) Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной разбились бы на пары пересекающихся. Однако тогда число звеньев оказалось бы четным; б) см. рис. 205; в) из любого четного числа звеньев, кроме 2 и 4. Указание. См. рис. 206.

465. См. рис. 207.

467. При четных n. Указание. Пример для $n=8$ — на рисунке 208.

468. а) Если выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы, то каждой его стороне параллельна некоторая другая его сторона; б) см. рис. 209.

469. Нет, не обязана. Пример — вершины правильного 11-угольника.

470. Нельзя! Каждая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетки. Поэтому среди покрытых доминошками клеток белых и черных должно быть одинаковое число. Но на шахматной доске 8×8 с вырезанными левой нижней и правой верхней угловыми клетками это не так: клеток одного цвета на две больше, чем другого. **472.** Нельзя.

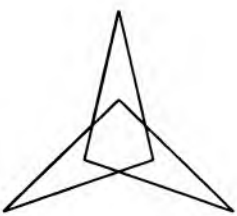


Рис. 205

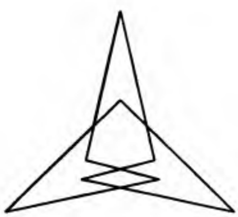


Рис. 206

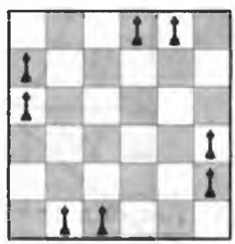


Рис. 207

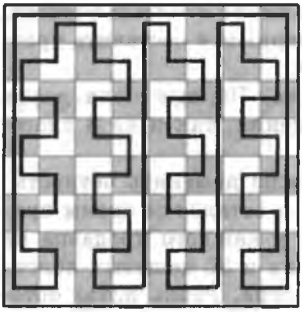


Рис. 208

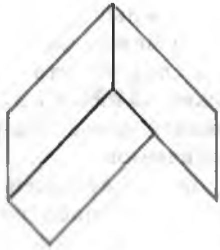


Рис. 209

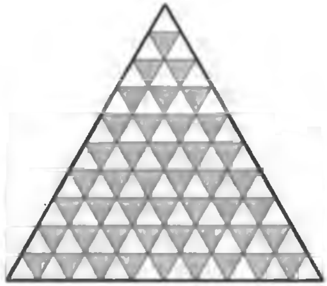


Рис. 210

474. Раскрасим треугольники в два цвета, как показано на рисунке 210. Незакрашенных треугольников на 10 больше, чем закрашенных, поэтому всего закрашенных треугольников 45, а незакрашенных 55. В цепочке цвета треугольников чередуются. Поэтому закрашенных треугольников в цепочке не больше 46, а всего треугольников не больше $45+46=91$.

476. 11. Указание. Раскрасив клетки фигуры в шахматном порядке, заметьте, что в каждом из получающихся при разрезании прямоугольников разность числа черных и белых клеток не превосходит 1.

477. Раскрасим доску в шахматном порядке, чтобы получилось 13 черных и 12 белых клеток. Поскольку соседние клетки разного цвета, то хотя бы одна черная клетка освободится и хотя бы на одной белой окажутся два (или более) жука.

478. Разрежем квадрат на блоки размером 2×2. Любой блок либо весь одного цвета, либо две его клетки синие, а две —красные. Значит, в каждом блоке количество синих клеток четно. Следовательно, и во всем квадрате количество синих клеток четно.

486. а) Нельзя; б) можно. **487.** б) При нечетных n.

491. Занумеруем деревья по порядку числами от 1 до 44. Пусть в какой-то момент число чижей на первом дереве n_1, число чижей на втором дереве n_2 и т. д. Рассмотрим такую сумму: $S=1\cdot n_1+2\cdot n_2+3\cdot n_3+\ldots+44\cdot n_{44}$.

Другими словами, S — сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи (как говорят математики, «с учетом кратности», т. е. номер k дерева, на котором находятся n_k чижей, входит в сумму n_k раз). Когда два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях, эта сумма либо вовсе не меняется, либо меняется сразу на 44. Поэтому остаток от деления S на 44 не меняется. Вначале $S=1+2+3+\ldots+44=\dfrac{44\cdot45}{2}=990$, так что число S не делится на 44. Если бы в некоторый момент все чижи собрались на одном дереве, то эта сумма стала бы делиться на 44 без остатка, что невозможно.

492. Нельзя. Указание. Занумеруйте лампы, начиная с горящей, по кругу числами от 1 до 12 и убедитесь, что среди ламп с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 и 11 число горящих всегда будет нечетным.

497. Если белых лоскутов x, то, поскольку каждый белый лоскут граничит с тремя черными, имеется $3x$ границ между белым и черным. Черных лоскутов $32-x$. Поскольку каждый из них граничит с пятью белыми, можно еще раз посчитать границы между белым и черным и составить уравнение $5(32-x)=3x$, из которого следует, что $x=20$.

499. а) Не может; б) может. **507.** Указание. Черные поля доски можно разбить как на 7 диагоналей одного направления, так и на 8 диагоналей перпендикулярного направления.

508. Указание. Сумма координат ладей должна поменять четность.

510. Вообразите, что продавец не ушел домой, а остался за своим прилавком. Пусть покупатели тратят по 2 р., покупая у каждого продавца на рубль. Тогда первые 10 покупателей купят 20 дорогих и 30 дешевых яблок, так что дешевые яблоки кончатся раньше, чем дорогие. Рубль исчез потому, что оставшиеся 10 дорогих яблок продали не по два яблока за рубль, а как смесь, по 5 яблок за 2 р. Другими словами, поскольку более дорогое яблоко стоило $\frac{1}{2}$ р. за штуку, а более дешевое — $\frac{1}{3}$ р., следовало продавать их по $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):2=\frac{5}{12}$ р. Эта цена выше, чем установленная продавцами цена в $\frac{2}{5}$ р. за штуку. $\left(\text{И выше ровно на } \frac{5}{12}-\frac{2}{5}=\frac{1}{60}.\right)$

516. 20 кг. Обозначим вес Ани буквой a. Тогда Таня весит $t=40-a$ кг. Маня — $m=50-(40-a)=50-40+a=10+a$ кг и т. д.

517. Всего денег у купцов $(90+85+80+75):3=110$ р. Поэтому у первого $110-90=20$ р., у второго $110-85=25$ р., у третьего $110-80=30$ р., а у четвертого $110-75=35$ р.

518. а) Указание. Занумеруем вершины по порядку. Очевидно, что суммы чисел в четных и нечетных вершинах совпадают (они равны сумме чисел на сторонах), откуда стертое число легко определяется.

520. Увеличим все числа в 100 раз. Если было разбиение на две группы с равными суммами, то и после увеличения в 100 раз оно тоже будет, но уже для целых чисел. Сумма полученных чисел $13\cdot110+15\cdot111$ нечетна. Значит, разбиение на две группы с равными суммами невозможно.

521. 3. **523.** Нетрудно проверить общий факт, что прибавление к нескольким числам их среднего арифметического приводит к группе чисел с тем же самым средним арифметическим. Поэтому все стрелки, начиная с третьего, выбивали по 70 очков.

532. б) $(x;\ y;\ z)=(0;\ 0;\ 0)$, $(6;\ 30;\ 20)$, $(-6;\ -30;\ 20)$, $(-6;\ 30;\ -20)$ или $(6;\ -30;\ -20)$; в) $(x;\ y;\ z)=(2;\ -1;\ 3)$. **534.** 13 тугриков.

535. При работе до встречи быстрый крот прокопает половину туннеля и еще некоторую часть. А если он остановится ровно на половине туннеля, то эту часть будет копать медленный крот, и его при этом придется кормить. Работа медленного крота обходится дороже, чем работа быстрого крота. Значит, работа до встречи обойдется дешевле.

536. 37,5 км/ч. **538.** 2250 м. **539.** 5 ч 36 мин. **540.** Нет. Из рисунка 211 видно, что за 3,5 ч пешеход мог пройти от 15 до 20 км. **542.** $\frac{160}{3}$ км/ч; не зависит. **543.** Указание. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

544. Шмель летал $300:(30+30)=5$ ч; пролетел $70\cdot5=350$ км.

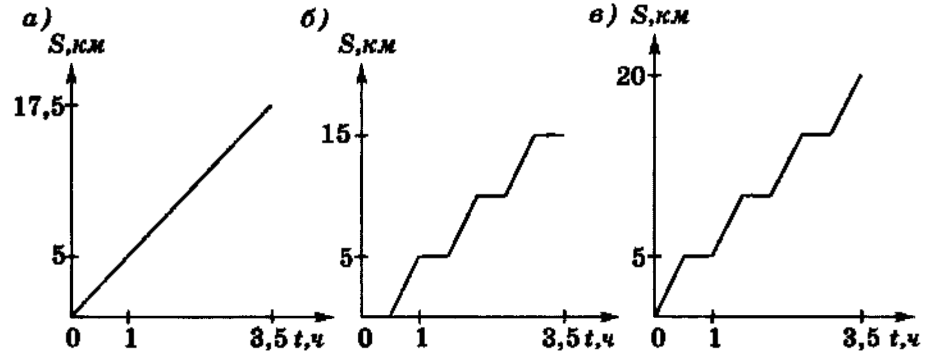


Рис. 211

548. 10 детей. Нарисуйте 3 круга — капустный, морковный и гороховый, как показано на рисунке 212. Изображайте людей точками и, начав с одной точки в пересечении всех кругов (это единственный вселюбящий ребенок), расставьте точки.

552. Математиков в 10, а философов в 100 раз больше, чем людей, одновременно являющихся и математиками, и философами. Значит, философов в 10 раз больше, чем математиков.

554. $1000-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{15}\right]=1000-333-200+66=533;$

$$1000-\left[\frac{1000}{2}\right]-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{1000}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{1000}{3\cdot 5}\right]-\left[\frac{1000}{2\cdot 3\cdot 5}\right]=1000-$$
$$-500-333-200+166+100+66-33=266.$$

555. Исключив из рассмотрения пятнадцать кружковцев, у которых $Б\neq Г$, и десятерых, у которых $Г=В$, получим не менее $40-10-15=15$ юных техников, у которых $Б=Г\neq В$.

556. Обозначим: B — число блондинов, G — число голубоглазых, M — число голубоглазых блондинов, N — число всех людей. Тогда по условию $\frac{M}{G}>\frac{B}{N}$. Умножив это неравенство на G и разделив на B, получим $\frac{M}{B}>\frac{G}{N}$. Это означает, что доля голубоглазых среди блондинов больше, чем их доля среди всего населения.

561. См. рис. 213. **563.** См. рис. 214. **564.** 0. **565.** Цифрой 5.

566. $5467\cdot 898=4\,909\,366$.

568. Количество литров масла, содержащихся в 17-литровых бидонах, должно оканчиваться на цифру 3. Это возможно, если таких бидонов 9. Отсюда следует, что 10-литровых бидонов 7, а всего бидонов 16.

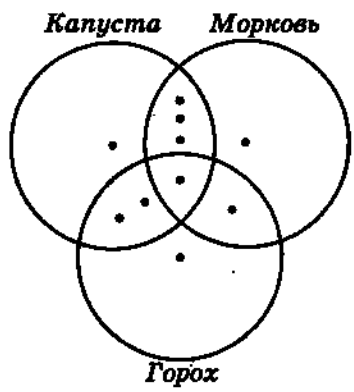


Рис. 212

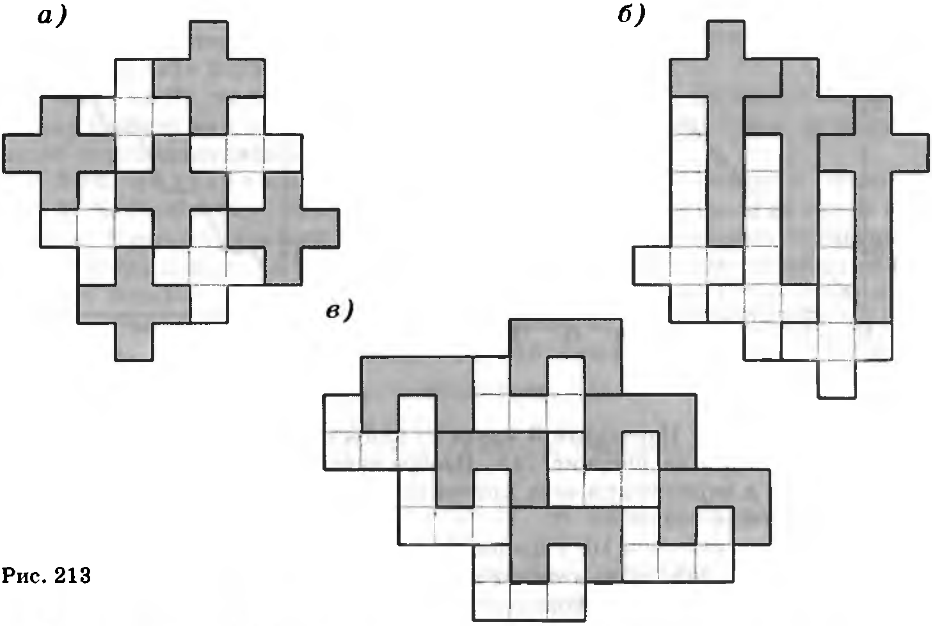


Рис. 213

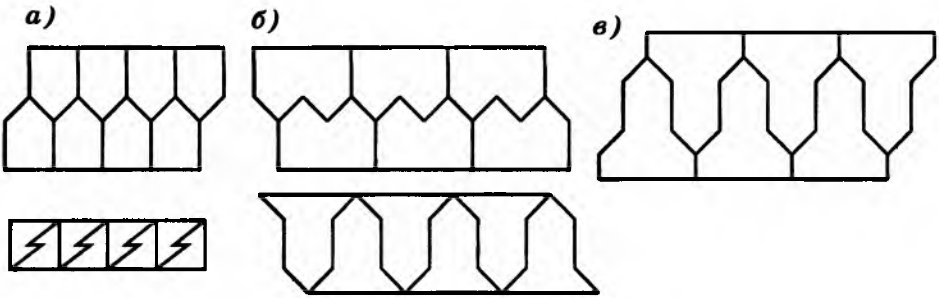


Рис. 214

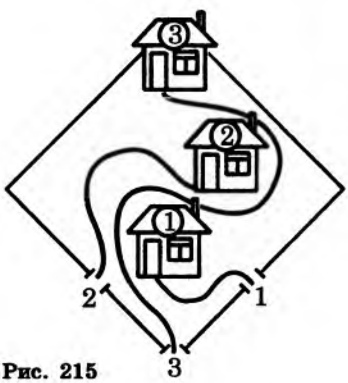


Рис. 215

570. а) 8 (угловые кубики); б) 36 (кубики, расположенные вдоль ребер исходного куба); в) 54 (кубики, прилегающие к каждой грани исходного куба). **571.** См. рис. 215. **572.** Можно. **573.** См. рис. 216. **575.** а) $4n$; б) $4n+1$. **581.** Воскресенье. **583.** Пальцы будут повторяться с периодом 8, поэтому достаточно рассмотреть остаток от деления 2000 на 8. Восьмым идет указательный палец. **587.** а) Будем делить числа вида 11...11 на 7 уголком. Числа 1, 11, 111, 1111, 11 111 не разделятся, а число 111 111 разделится. Отсюда ясно, что если в записи числа больше шести единиц, то после каждой шестой единицы очередной промежуточный остаток будет равен нулю, а после всех остальных единиц — отличен от нуля. Но это значит, что число вида 11...11 делится на 7 тогда и только тогда, когда количество его цифр делится на 6.

б) Будем делить числа вида 11...11 уголком на 13. Числа 1, 11, 111, 1111, 11 111 нацело не разделятся, а число 111 111 разделится. Но это значит, что число 11...11 делится на 13 тогда и только тогда, когда количество его цифр делится на 6. Теперь ответ на вопрос очевиден.

598. Правильный ответ: $23+5(n-1)=5n+$ $+18$. Дело в том, что 23 — первый, а не нулевой (т. е. предшествующий первому) член прогрессии.

599. 23, 18, 13, 8, 3. **605.** 3, 7, 11, 15, 19. **606.** 15, 11, 7, ... **607.** 2 и 1. **608.** На 16. **609.** 120. **610.** 50. **615.** Например, 15 317.

616. а) Например, 2 899 999 и 2 900 000. **618.** Нет. Например, среди номеров от 000 001 до 001 000 (или от 998 999 до 999 998) нет счастливых. **620.** Можно. **622.** Не всегда: на рисунке 217 изображены шесть отрезков, концы которых нельзя соединить требуемым образом.

623. Нет. Каждая операция увеличивает на 1 центральное число. Ровно на 1 возрастает и сумма чисел угловых клеток. (Иными словами, стоящее в угловой клетке число показывает, сколько раз была произведена операция с соответствующим квадратом 2×2.) Но $18\neq4+$ $+5+7+6$.

624. См. рис. 218.

625. Не всегда. На рисунке 219 изображена «змея» из кругов. Отмеченные круги должны быть одного цвета. Но если «змея» достаточно длинна, то она может так изогнуться, что отмеченные круги («нос» и «кончик хвоста») коснутся.

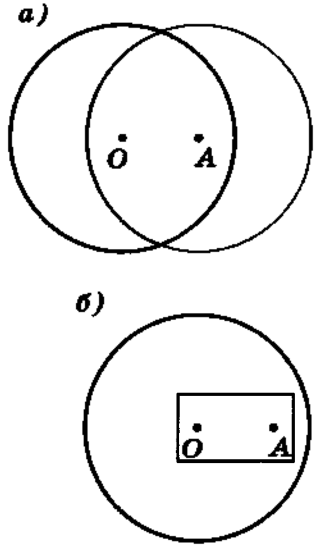


Рис. 216

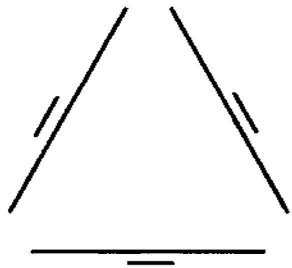
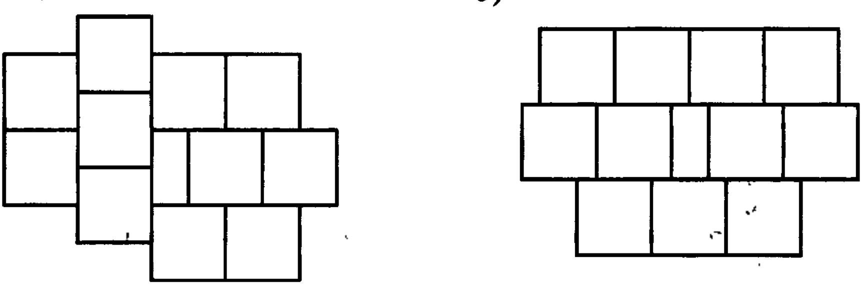


Рис. 217

Рис. 218

а) б)



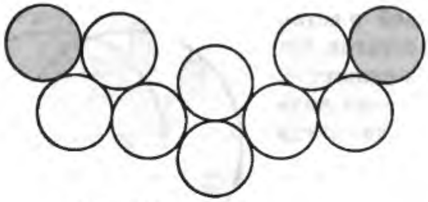


Рис. 219

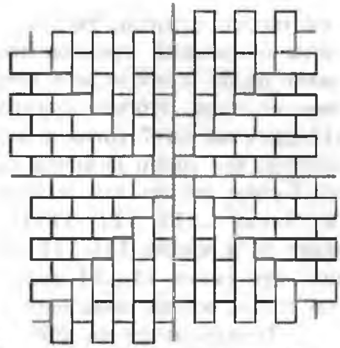


Рис. 220

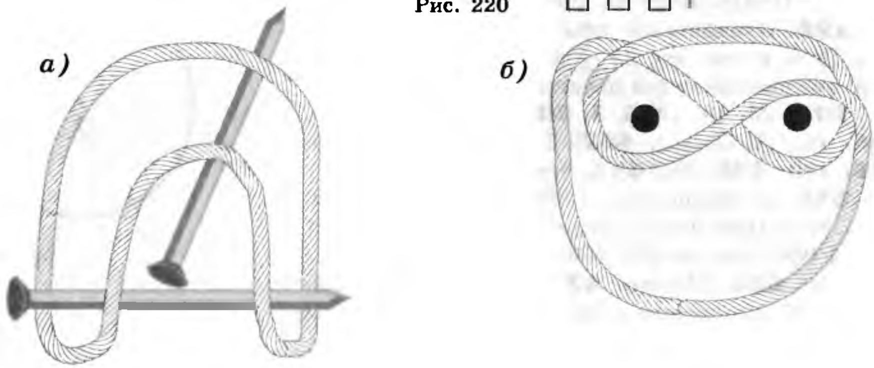


Рис. 221

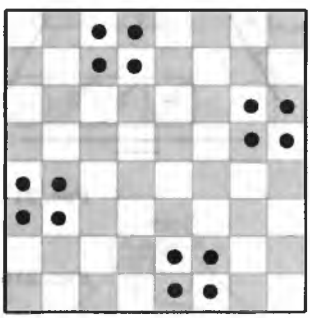


Рис. 222

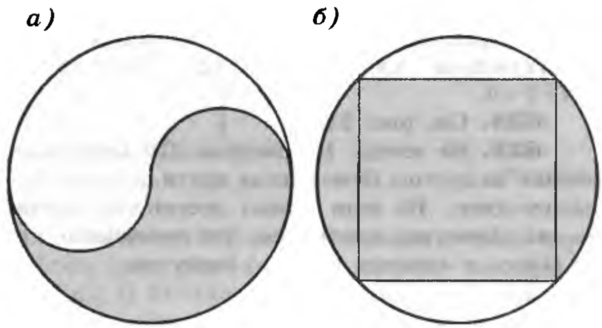


Рис. 223

626. Можно (рис. 220). **627.** Можно (рис. 221).

628. Можно. Подожжем один из шнуров с обоих концов и одновременно — другой с одного конца. Первый шнур сгорит через 30 с, в этот момент подожжем второй шнур с другого конца.

629. Можно (рис. 222). **630.** См. рис. 223.

632. Не всегда. Если выпилить 1, 5, 6 и 8-е зубья, то при любом повороте какие-нибудь две дырки совместятся.

633. 1, 3, 9 и 27 г. **634.** Нарисуйте равносторонний треугольник и выполните параллельный перенос на расстояние, равное длине его стороны.

635. Составьте из равносторонних треугольников два ромба с общей вершиной так, чтобы расстояние между вершинами, противоположными этой общей вершине, было равно длине стороны ромба.

636. См. рис. 224. **637.** Сначала везде поставьте знак «+». Получите сумму $1+2+3+\ldots+19+20=210$. Затем сообразите, что поставить знак «−» перед каким-либо числом a — то же самое, что вычесть удвоенное число a. Следовательно, достаточно решить уравнение $210-2x=20$ и затем из имеющихся чисел 2, 3, ... , 19, 20 составить число x.

638. Не всегда, ибо возможна ситуация, изображенная на рисунке 225. Здесь княжествам соответствуют точки, которые соединены отрезком в том и только том случае, если соответствующие княжества дружественны.

640. а) $(1+19)+(3+17)+(5+15)+(7+13)+(9+11)=20\cdot5=100$; б) 923; в) $1994:2=997$; г) $101\cdot50=5050$. **643.** 375. **644.** $1+2+3+\ldots+36=666$. **645.** 10. **646.** а) Разобьем гири на сто пар равного веса: $100+102$, $99+103$, $98+104$, ..., $1+201$. Разложим пары гирь поровну на весы; б) составим две пары гирь равного веса: $198+200$ и $197+201$. Составим еще 98 пар гирь равного веса: $1+196$, $2+195$, $3+194$, ..., $98+99$. Разложим гири на весы парами.

647. а) Расположим гири в порядке возрастания их веса и станем раскладывать их по одной в три кучки поочередно, то слева направо, то справа налево. После любого четного числа таких операций (в частности, после $552:3=184$ операций) кучки будут равны по весу; б) первые 9 гирь разложите, например, так: 1-я кучка: $1+9+5$, 2-я кучка: $6+7+2$, 3-я кучка: $3+4+8$, а оставшиеся 546 гирь — так же, как в предыдущей задаче.

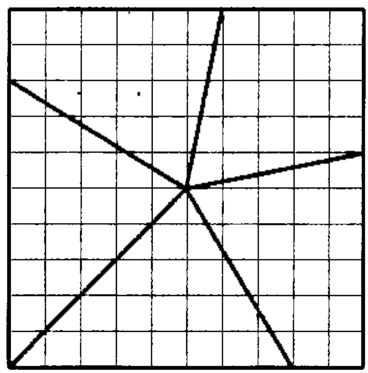


Рис. 224

Суммарный вес всех n гирь равен $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Для того чтобы можно было разложить гири на три кучки одинакового веса, очевидно, необходимо, чтобы или n, или $n+1$ делилось на 3. Покажите, что при $n>3$ этого и достаточно. Рассуждать можно, например, по такому плану. Значения $n=5$, $n=8$ и $n=9$ исследуются непосредственно. Общий случай сводится к этим частным, если учесть, что 6 последовательных натуральных чисел можно разбить на 3 пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковы.

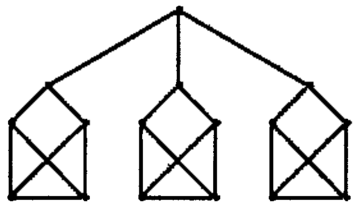


Рис. 225

648. $1=1^3$, $8=2^3$, $27=3^3$, $64=4^3$, $125=5^3$, так что разумно предположить, что сумма очередных нечетных чисел равна n^3. Чтобы это доказать, воспользуемся приемом, который при $n=3$ выглядит следующим образом: $7+9+11=(1+3+5+7+9+11)-(1+3+5)=6^2-3^2$. В общем случае достаточно из суммы первых $S=1+2+...+n$ нечетных чисел вычесть сумму первых $s=1+2+...+(n-1)$ нечетных чисел. Поскольку $S=\frac{n(n+1)}{2}$, $s=\frac{n(n-1)}{2}$ и сумма первых нескольких нечетных натуральных чисел равна квадрату их количества, то мы имеем дело с разностью $S^2-s^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}=\frac{n^2}{4}((n+1)^2-(n-1)^2)=n^3$. Закономерность доказана.

649. 3 щелчка. Год был високосный.

651. Искомое число пассажиров делится на 2, и, кроме того, $\frac{2}{25}(=8\%)$ от этого числа есть число целое. Следовательно, искомое число делится на 2 и на 25, т. е. на 50, а так как оно не превосходит 70, то ответ ясен: 50.

652. Пусть в короля попало x тухлых яиц и y кочанов гнилой капусты. Тогда $64+x+y=4x+6y$, откуда $3x+5y=64$. Это уравнение легко решить в целых неотрицательных числах: $(x; y)=(3; 11)$, $(8; 8)$, $(13; 5)$ или $(18; 2)$. Поскольку количество яиц кратно 3, а количество кочанов капусты четно, из четырех вариантов остается последний: $x=18$, $y=2$. В этом случае 64 зрителя метали в Дэвида Гаррика младшего и Эдмунда Кина старшего (см.: Марк Твен. «Приключения Гекльберри Финна») дохлых кошек, $18\cdot5:3=30$ — тухлые яйца, а $2\cdot7:2=7$ — гнилую капусту. Итого: 64+30+7=101 зритель.

653. 24. **654.** В первый магазин привезли 814 книг, во второй — 1026, в третий — 150. **655.** 40. **657.** Можно: в фунте 20 шиллингов, в шиллинге 12 пенсов.

661. Одна пара очевидна ($x=y=2$), а вторая — $x=2^5=32$, $y=2^4=16$ или $x=20\,000$, $y=2000$. Вообще, из уравнения сразу видно, что число y четное. Положив $y=2m$, получим $2x^3=16m^4$, откуда видно, что x четно, $x=2n$, и уравнение преобразуется к виду $n^3=m^4$. Но если число одновременно является и третьей, и четвертой степенью, то оно есть двенадцатая степень k^{12}, т. е. $n=k^4$, $m=k^3$, что позволяет указать все решения нашего уравнения: $(x, y)=(2k^4, 2k^3)$.

663. Самый мудрый из мудрецов через некоторое время может догадаться с помощью следующего рассуждения: «Допустим, на мне белый колпак. Тогда каждый из двух, исключая меня, видит перед собой один белый и один черный колпак. В этом случае, предположив, что на нем также белый колпак, один из них легко догадается, что на нем не может быть белого колпака, поскольку в этом случае третий видел бы перед собой два белых колпака и мгновенно понял бы, что на нем черный колпак. А это означает, что на мне также черный колпак».

664. Нет, при $n=41$ число n^2+n+41 делится на 41. Составное оно и при $n=40$, ибо $40^2+40+41=40(40+1)+41=40\cdot41+41=41(40+1)=41^2$.

668. 199. Вообще для n домов можно построить $2n-1$ заборов. В самом деле, если дом один, то можно построить только один забор $(2\cdot1-1=1)$. Дальше применим индукцию. Если для 1, 2, ..., $n-1$ домов формула $2n-1$ уже проверена, то рассмотрим n домов, вокруг которых построено максимально возможное количество заборов. Какой-то один забор огораживает все дома. Если этот внешний забор снести, то самыми внешними станут некоторые два забора. Внутри одного из них будет некоторое число k домов, а внутри другого — остальные $n-k$ домов. Поскольку $k<n$, вокруг k домов может быть построено самое большее $2k-1$ заборов. Аналогично вокруг остальных $n-k$ домов может быть построено самое большее $2(n-k)-1$ заборов. Значит, всего заборов не более $(2k-1)+(2(n-k)-1)+1=2n-1$.

671. Обозначим через $f(n)$ наибольшее число частей, на которые n прямых могут разбить плоскость. Порисовав, можно заполнить таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	2	4	7	11	16	22	29

и обнаружить закономерность $f(n)=f(n-1)+n$. Вам осталось доказать эту закономерность и вывести из нее явную формулу:

$$f(n)=\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

672. Придумать маршрут поможет рисунок 226.

673. См. рис. 227.

674. а) Если конь может обойти доску размером $4\times n$, начав с клетки H и остановившись на K, то он может обойти и доску размером $4\times(n+3)$, начав с клетки $H-6$ и остановившись на $K+6$ (см. рис. 228).

б) Поля верхней и нижней горизонталей будем называть крайними, а поля средних горизонталей — средними. Поскольку с крайних полей можно идти только на средние, а крайних клеток столько же, сколько средних, в маршруте крайние поля должны чередоваться со средними (располагаться строго через одно). Но в этом случае все средние клетки были бы одного цвета, а это противоречит устройству шахматной доски.

675. а) См. рис. 229, *а*; б) разбейте доску на четыре доски размером 5×5 (рис. 229, *б*). Обойдите сначала одну из них, затем вторую, третью и четвертую; в) рассмотрите каемку шириной в 2 клетки, идущую по краю доски. Придумайте замкнутый путь коня, который проходит по одному разу через каждое

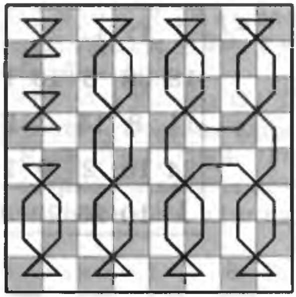


Рис. 226

а)

20	9	16	3	12
15	2	11	6	17
10	19	8	13	4
1	14	5	18	7

б)

24	11	16	3	20	7
17	2	19	6	13	4
10	23	12	15	8	21
1	18	9	22	5	14

в)

28	5	22	7	18	13	16
23	2	25	12	15	10	19
4	27	6	21	8	17	14
1	24	3	26	11	20	9

Рис. 227

$H-6$	$K+2$	$H-2$	K	*Доска*
$H-3$	$K+5$	$H-5$		*размером*
$K+3$	$H-1$	$K+1$		
$K+6$	$H-4$	$K+4$	H	$4\times n$

Рис. 228

а)

7	12	17	22	5
18	23	6	13	16
11	8	15	4	21
24	19	2	9	14
1	10	25	20	3

б)

				100					
				76	1		25		
		75		51	26				
					50				

Рис. 229

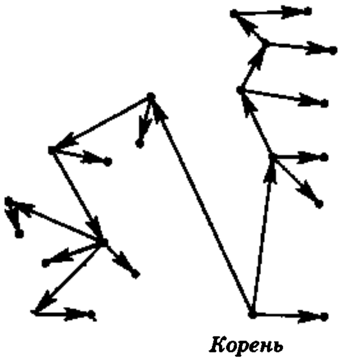


Рис. 230

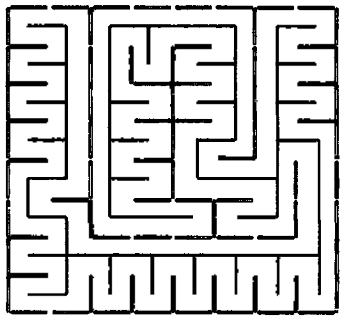


Рис. 231

поле этой каемки. Разбейте всю доску на такие каемки и начните путь с центральной клетки. **677.** После каждого распила число бревен увеличивается ровно на 1. Было 72 − 52 = 20 бревен.

680. Назовем одну из точек корнем. Сопоставим каждой из остальных вершин последний отрезок пути, ведущего в эту точку из корня. Это соответствие будет взаимно-однозначным. Чтобы сделать это очевидным, удобно расставить на отрезках стрелки, ведущие от корня: в каждую точку, кроме корня, ведет одна стрелка (рис. 230). Задачу можно решить также по индукции: удаляя любой лист дерева (вершину, из которой исходит единственное ребро), мы одновременно удаляем одно ребро.

681. 63 спички. Если прочертим все пути, которыми может ходить ладья, то (при условии, что не снимали лишних спичек) получим дерево с 64 вершинами (рис. 231).

685. После каждого хода количество кучек увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце — 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний (выигрывающий!), 42-й ход сделает второй игрок.

688. Нарисуем 9 кружков и расставим в них цифры от 1 до 9. Соединим линией всякие два кружка, цифры в которых могут стоять рядом (рис. 232). Теперь вопрос можно сформулировать так: можно ли, идя только по линиям, обойти все кружки этой фигуры по одному разу и вернуться на прежнее место? Ответ очевиден: можно, причем единственным образом. **690.** Указание. Воспользуйтесь рис. 233. **691.** Да: $A-D-C-B-I-F$.

694. Из условия задачи вытекает, что Т > И > Р > А > К > В > О > П > > С > Н. Букв здесь десять. Различных цифр тоже десять. Поэтому единственно возможный ответ: Т=9, И=8, Р=7, А=6, К=5, В=4, О=3, П=2, С=1, Н=0. **695.** Указание. Соединив те поля, которые соединены ходом коня, получим отдельно ни с чем не связанное центральное поле b2 и цикл из остальных полей (рис. 234).

698. 6. Разобьем числа от 1 до 10 на три цепочки 1—2—4—8, 3—6, 5—10 и два отдельных числа — 7 и 9. Нельзя брать соседние числа в цепочке. Значит, из первой цепочки можно взять не более двух чисел, а из любой другой цепочки — не более чем по одному числу.

699. Пусть каждые два толстяка, один из которых вдвое тяжелее другого, возьмутся за руки. Получатся цепочки:

1—2—4—8—16—32—64;
3—6—12—24—48—96;
5—10—20—40—80;
7—14—28—56; ...

Раскрасим каждую цепочку, чередуя два цвета, а потом сформируем две одноцветные команды. Толстяки одного цвета не брались за руки, по-

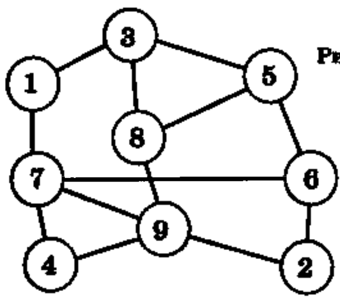


Рис. 232

Рис. 233

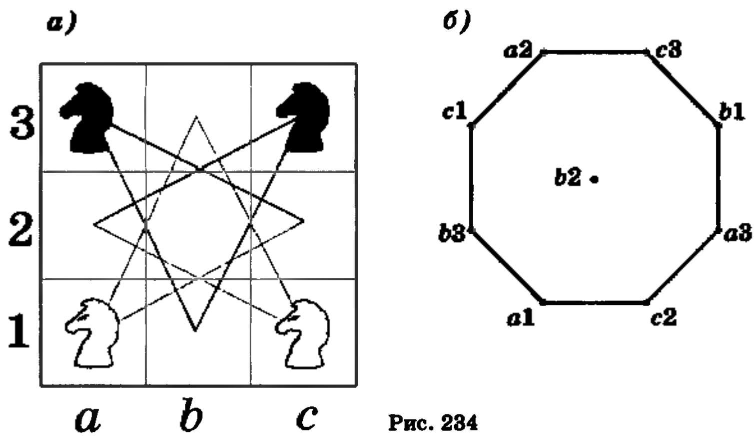


Рис. 234

этому никакие два из них не будут отличаться по весу в два раза. Короче говоря, в одну часть мы может отправить числа, в разложение которых на простые множители множитель 2 входит в нечетной степени, а в другую — остальные числа.

702. Соединим те из чисел от 1 до 99, которые дают в сумме 99 или 100. Получится цепочка 99—1—98—2—97—3—...—51—49—50. Очевидно, единственный способ выбрать 50 чисел, не соседствующих в цепочке друг с другом,— взять числа 99, 98, 97, ..., 51, 50.

709. Число $19\cdot6\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ раз}}2=20\cdot6\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ раз}}2-6\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ раз}}2=12\underbrace{6\ldots6}_{n\text{ раз}}40-6\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ раз}}2=$ $=120\underbrace{3\ldots3}_{n-1\text{ раз}}08$ делится на 19 при любом натуральном n, что и требовалось доказать. **710.** 4 ч. **714.** Из рисунка 235 видно, как, выстрелив 12 раз, ранить любой четырехклеточный корабль. А для доказательства необходимости 12 выстрелов мы разместим на доске 12 кораблей размером 4×1 (рис. 236).

718. Обозначим через x количество учеников, участвовавших ровно в одной олимпиаде. Тогда ровно в двух олимпиадах участвовали $\frac{x}{2}$ учеников, а в трех — $\frac{x}{3}$. Составим уравнение: $100+50+48=x+2\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x}{3}$ — и решим его: $x=\frac{198}{3}=66$. Значит, всего в олимпиадах участвовал $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=66+33+22=$ $=121$ ученик.

719. Две партии. **720.** а) $10\cdot\frac{9}{2}=45$; б) $\frac{(n-1)}{2}$

721. Если x шахматистов сыграли друг с другом по y партий, то всего было сыграно $\frac{x(x-1)}{2}\cdot y$ партий. Приравнивая это число к 224, получаем уравнение $x(x-1)\cdot y=448$. Среди делителей числа $448=7\cdot64$ только два (7 и 8) отличаются ровно на единицу. Поэтому 8 шахматистов сыграли друг с другом по 8 партий.

722. Не играли. Если выбывшие не играли между собой, то с их участием состоялось 10 партий, а если играли, то 9. Но круговой турнир не может состоять из 38 − 9 = 29 партий.

724. От 4 до 12. **725.** Нет. Количество точек пересечения отрезков было бы равно 7 · 3 : 2.

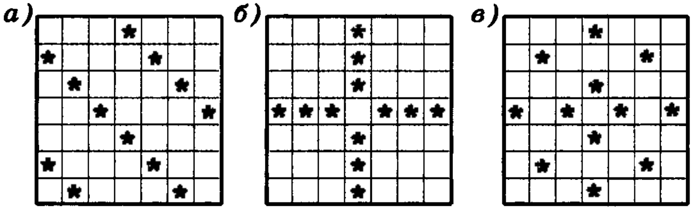


Рис. 235

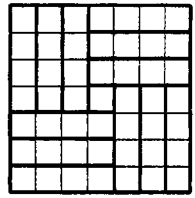


Рис. 236

726. а) Можно. См. рис. 237; б) см. рис. 238.

727. Если n шаров так расположены, то удвоенное число точек касания равно $3n$. Поэтому n должно быть четно. При $n = 4$ центры шаров — вершины правильного тетраэдра. При $n = 2k$, где $k \geqslant 3$, расположим центры k шаров в вершинах правильного k-угольника, а затем приложим сверху точно такую же цепочку шаров, чтобы каждый шар одной цепочки касался одного шара другой цепочки.

730. 2 очка. Первые три команды сыграли с остальными $3 \cdot 5 = 15$ матчей, а между собой — 3 матча и потому могли набрать $(15 + 3) \cdot 2 = 36$ очков. В действительности они набрали $14 + 12 + 8 = 34$ очка.

733. Нетрудно понять, что каждый сыграл по 4 партии, а всего было сыграно 10 партий. Щукин набрал не более 3 очков, поскольку, по словам Окунева, хотя бы одну партию Щукин проиграл. Но Щукин не мог набрать меньше 3 очков, поскольку в противном случае общее число очков не превосходило бы числа $2{,}5 + 2 + 1{,}5 + 1 + 0{,}5 = 7{,}5$, что меньше 10. Значит, Щукин одну партию проиграл, а остальные выиграл. Учитывая, что Окунев никому не проиграл, заключаем: Щукин проиграл Окуневу, а у всех остальных выиграл. Теперь заметим, что $3 + 2{,}5 + 2 + 1{,}5 + 1 = 10$, поэтому Окунев набрал 2,5 очка, Ершов — 2, Карасев — 1,5, а Пескарев — 1 очко. Поскольку Окунев, не проиграв ни одной партии, набрал в играх с Ершовым, Карасевым и Пескаревым 1,5 очка, все эти три партии были ничейными. Если бы Ершов с Карасевым сыграли вничью, то ничья была бы и между Карасевым и Пескаревым, что противоречит утверждению Пескарева о том, что все другие одержали хотя бы по одной победе. Значит, Ершов выиграл у Карасева, а Карасев — у Пескарева, так что партия Ершова и Пескарева закончилась вничью.

735. 9. **737.** Пусть было m мастеров и g гроссмейстеров. Тогда $m + g = n$. Как бы ни окончилась партия между двумя партнерами, суммарное число очков, набранных ими, увеличится на 1. Значит, мастера в партиях с ма-

а)

б)

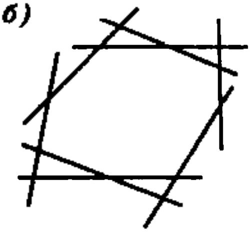
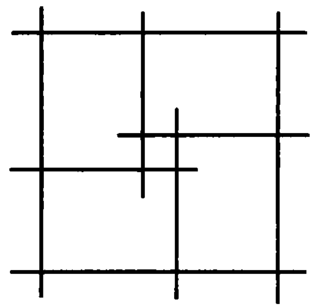


Рис. 237

а)



б)

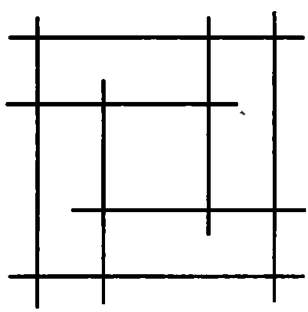


Рис. 238

стерами набрали $\frac{m(m-1)}{2}$ очков. Поскольку каждый мастер половину своих очков набрал в партиях с гроссмейстерами, общее число очков, набранных мастерами в партиях против гроссмейстеров, равно $\frac{m(m-1)}{2}$. Точно так же оказывается, что гроссмейстеры в партиях против мастеров набрали $\frac{g(g-1)}{2}$ очков. Число партий, в которых мастер играл с гроссмейстером, равно mg. Отсюда $\frac{m^2-m}{2}+\frac{g^2-g}{2}=mg$, т. е. $m^2-2mg+g^2=m+g=n$, откуда $n=(m-g)^2$.

742. $203 = 7 \cdot 29 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$. Надо взять $203 - 7 - 29 = 167$ единиц. **743.** Нет, ибо 528 делится на 11. **745.** $32 \cdot 27$ или $1 \cdot 864$. **747.** $271 \cdot 205 = 55\,555$. **748.** Да, например, $6 \cdot 6 = 12 \cdot 3$; $15 \cdot 6 = 30 \cdot 3$.

749. Разложим 1995 на множители: $1995 = 5 \cdot 399 = 5 \cdot 3 \cdot 133 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$. Простое число 19 не записывается одной цифрой, и потому искомое число либо $5 \cdot 19$, либо $3 \cdot 19$, либо $7 \cdot 19$. Нам подходит $57 \cdot 5 \cdot 7 = 1995$.

753. в) Правило очень простое: число делителей натурального числа n нечетно в том и только том случае, когда n — точный квадрат. Например, число 12 имеет четное число делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Они легко объединяются в пары: $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12$. Число 36 имеет нечетное число делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Они тоже объединяются в пары, только 6 при этом остается наедине с собой: $1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6^2 = 36$.

756. 24 (рис. 239). **757.** $2 \cdot 5 = 10$.

759. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому разберем три случая:

1) если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьет 4 поля (включая то, на котором стоит), и остается 60 полей, на которые можно поставить черного короля;

2) если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей — 24), то он бьет 6 полей, и для черного короля остается 58 возможных полей;

3) если же белый король стоит не на краю доски (таких полей — 36), то он бьет 9 полей, и для черного короля остается 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов расстановки королей.

761. а) $2^4 = 16$. На каждом шаге есть две возможности: идти направо или вниз. **765.** $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. **768.** 10.

776. в) $(10 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (5 + 1) = 264$ делителя (считая единицу и само число), ибо $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^5$.

780. Заменив в произведении $N = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99! \cdot 100!$ факториалы их определениями, т. е. записав $1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot \ldots \times (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)$, видим, что множитель 1 появится 100 раз, множитель 2 — 99 раз, 3 — 98 раз и т. д. вплоть до единственного

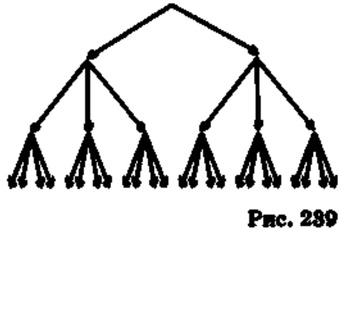


Рис. 239

множителя 100. Значит, $N = 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot \ldots \cdot 99^2 \cdot 100$, так что N можно представить в виде $N = a^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100$. Вынося из четных чисел по двойке, получим $N = a^2 \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 50$. Выходит, достаточно зачеркнуть 50!, и произведение факториалов станет точным квадратом.

781. Как бы они ни играли, на доске в конце концов окажется 8 ладей. Выиграет второй. **782.** Может. **784.** а) Выиграет второй, копируя цифры первого. Получается число $aabbcc$, которое делится на 11. б) Выиграет второй, добиваясь ситуации $a(a-1)bbcc*$. Какую бы цифру ни поставил вместо звездочки первый, на 11 число делиться не будет. **796.** Второй игрок выиграет, называя числа, делящиеся на 10. **797.** Начинающий выиграет, разбив первым ходом минусы на два «куска» равной длины. После этого начинающий может каждым ходом переправлять минусы, симметричные тем, которые перед этим переправил второй.

801. а) Второй игрок выиграет, поддерживая равенство куч. б) Начинающий забирает за один ход все камни из одной кучи, а затем каждым ходом уравнивает количества камней в двух оставшихся кучах.

806. Представим данную таблицу в виде двух таблиц. Первая таблица состоит из десяти одинаковых строк, в каждой из которых записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, а вторая состоит из десяти одинаковых столбцов, в каждом из которых записаны числа 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Теперь ответ очевиден: $5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 5(0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90) = 2525$.

807. Поскольку каждая цифра участвует в разрядах единиц, десятков и сотен по одному разу, ответ ясен: $1 + 2 + \ldots + 9 + 10 + 20 + \ldots + 90 + 100 + 200 + \ldots + 900 = 4995$. **808.** Поскольку $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$, а $1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, то получится исходное число.

812. Указание. $19941994 = 1994 \cdot 10001$; $199519951995 = 1995 \cdot 100010001$. **814.** Обозначим через x число, образованное последними двумя цифрами. Тогда $(400 + x) \cdot \frac{3}{4} = 10x + 4$, откуда $x = 32$.

818. 105 263 157 894 736 842.

819. а) Может. Например, 7125; б) не может. Пусть x — зачеркиваемая цифра, n — количество остальных цифр, y — число, остающееся после зачеркивания. Тогда $x \cdot 10^n + y = 58y$, откуда $x \cdot 10^n = 57y$. В последнем равенстве правая часть содержит простой множитель 19, которого левая часть содержать не может. **820.** 21 978. **821.** 49 км.

823. б) n. **833.** См. рис. 240. **834.** См. рис. 241.

836. $a = 9$; $b = 2$ и $a = 17$; $b = 6$.

838. а) Не всегда. Например, нельзя, если на всех 28 крайних клетках доски стоит по фигуре; б) всегда.

839. Допустим, $m = x + 2y + 5z + 10t + 20u + 50v + 100w$ и $n = x + y + z + t + u + v + w$. Умножим второе уравнение на 100, получаем $100n = 100x + 50 \cdot 2y + 20 \cdot 5z + 10 \cdot 10t + 5 \cdot 20u + 2 \cdot 50v + 1 \cdot 100w$. Объединяя это равенство с первым уравнением, получаем требуемый размен. **848.** 72 630 и 72 135. **850.** 3132 и 3136. **851.** Нельзя. **855.** 337. **856.** 9.

862. а) Если из карточек выложены числа x, $2x$, $3x$, $4x$ и $5x$, то их сумма $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 15x$ при делении на 9 дает такой же остаток,

Рис. 240

а)

б)

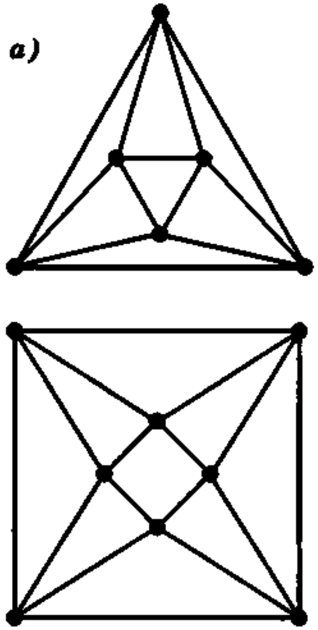
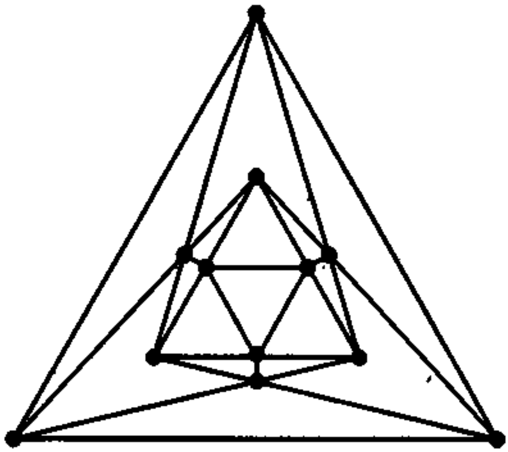


Рис. 241



что и сумма цифр $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Значит, $x \vdots 3$. Поскольку число $5x$ двузначное, то $x<20$. Осталось перебрать числа 12, 15 и 18 и получить ответ: 18, 36, 54, 72 и 90; б) 9, 18, 27, 36 и 45.

864. 44, 47 или 50.

865. б) Числа x, $s(x)$ и $s(s(x))$ дают одинаковые остатки при делении на 3, поэтому $x+s(x)+s(s(x))$ делится на 3. Число 1993 не делится на 3. Значит, решений нет; в) поскольку $x<1993$, то $s(x) \leqslant s(1989)=27$. Значит, $s(s(x)) \leqslant s(19)=10$, а $s(s(s(x))) \leqslant 9$. Из уравнения следует, что $x=1993-s(x)-s(s(x))-s(s(s(x))) \geqslant 1993-27-10-9=1947$. Поскольку числа x, $s(x)$, $s(s(x))$ и $s(s(s(x)))$ дают одинаковые остатки при делении на 9, а 1993 дает остаток 4, число x должно давать остаток 1 при делении на 9. Среди чисел от 1947 до 1993 остаток 1 при делении на 9 дают 1954, 1963, 1972, 1981 и 1990. Подходит только 1963. **866.** Такое число единственное, это $1494=83\cdot18$. Если из искомого числа вычесть его сумму цифр, то получится число, делящееся на 9 и на 82.

872. 27 721. Указание. НОК $[11, 10, 9, 8, 7, 6]=11\cdot8\cdot9\cdot5\cdot7=27\,720$.

879. 4. **880.** Остаток равен 22. Из условия задачи следует, что $n=6k+4$ и $n=15l+7$; тогда $5n=30k+20$ и $2n=30l+14$. Отсюда $n=5n-2\cdot2n=30(k-2l)-8=30(k-2l-1)+22$. **882.** 41.

887. Наименьшим числом, делящимся на все числа от 1 до 9, является НОК $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]=8\cdot9\cdot5\cdot7=2520$. Таким образом, искомое число должно делиться на 2520. Найти его можно, деля уголком число 1993**** на 2520. Количество цифр, обозначенных звездочками, выясняется в процессе деления. Получаем ответ: 1 993 320.

890. Общий член первой прогрессии имеет вид $a_n = 3 + 4(n-1)$; указанным членам прогрессии соответствуют значения $n = 1, 2, \ldots, 102$. Точно так же члены второй прогрессии получаются по формуле $b_k = 2 + 7(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, 102$. Задача, таким образом, состоит в нахождении всех чисел n и k, $1 \leqslant n \leqslant 102$, $1 \leqslant k \leqslant 102$, при которых $a_n = b_k$, т. е. $4n + 4 = 7k$. Равенство $4(n+1) = 7k$ выполняется лишь в случае, если k кратно 4, т. е. если $k = 4s$; ясно, что s может принимать значения 1, 2, ..., 25 (ибо $1 \leqslant k \leqslant 102$). Но если $k = 4s$, то $4(n+1) = 7 \cdot 4s$, т. е. $n = 7s - 1$; так как $1 \leqslant n \leqslant 102$, то допустимыми значениями s являются только 1, 2, ..., 14. Итак, имеется 14 чисел, являющихся членами одновременно обеих прогрессий; сами эти числа легко найти либо из формулы для a_n при $n = 7s - 1$, где $s = 1, 2$, 14, либо из формулы для b_k при $k = 4s$, $s = 1, 2, \ldots, 14$.

892. $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. **895.** 123 к.

898. а) Поскольку произведение трехзначного числа на однозначное не может быть пятизначным числом, этот пример не имеет решений.

899. б) Это число меньше 10^9, но больше $2 \cdot 10^8$, поэтому основание степени меньше 32, но больше 20. Поскольку сумма цифр делится на 3, основание шестой степени тоже делится на 3. 21^6 не годится, так как оканчивается на 1, 24^6 оканчивается на 6, а 30^6 — на 6 нулей. Вычислив 27^6, получаем ответ 387 420 489. **900.** $43^3 = 79\,507$.

904. $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+14 = 92$.

906. 66 ходов. В левой нижней клетке сумма номеров равнялась 2, а в правой верхней 200. Следовательно, коню понадобится не менее $\frac{200-2}{3} =$ $= 66$ ходов. Но, чередуя ходы на две горизонтали вправо и одну вертикаль вверх с ходами на одну горизонталь вправо и две вертикали вверх, можно перевести коня за 66 ходов.

907. а) $3930 + 3980 = 7910$; б) $8653 + 8653 = 17\,306$; в) $145\,826 + 948\,947 = 1\,094\,773$; г) $10\,652 - 9067 = 1585$; д) $23\,674 \cdot 2 = 47\,348$; е) $85\,931 + 85\,931 = 171\,862$; ж) $18\,969 + 18\,969 = 37\,938$; м) $364\,768 + 364\,768 = 729\,536$; н) $35\,977 + 35\,977 = 71\,954$; о) $51\,286 + 1582 = 52\,868$; п) $6823 + 6823 = 13\,646$.

908. ЧАЙ = АЙ·5, т. е. Ч·100 + АЙ = АЙ·5 и Ч·25 = АЙ. Так как число АЙ двузначное, то Ч может быть равно только 1, 2 или 3. Каждому значению Ч соответствует определенное решение: если Ч = 1, то АЙ = 25 (А = 2, Й = 5); если Ч = 2, то АЙ = 50 (А = 5, Й = 0); если Ч = 3, то АЙ = 75 (А = 7, Й = 5). Значит, расшифровать запись можно тремя способами.

909. а) Записав исходное равенство в виде ЛИК·ЛИК = 1000·ВУВ + ЛИК, вычтем из обеих частей равенства ЛИК. Получим ЛИК·ЛИК − ЛИК = 1000·ВУВ, т. е. ЛИК·(ЛИК − 1) = 1000·ВУВ. Числа ЛИК и ЛИК − 1 являются двумя последовательными натуральными числами. Поэтому они взаимно просты. Так как их произведение делится на 1000 = 5·5·5·2·2·2, то одно из них делится на 125, но не делится на 2, а другое делится на 8, но не делится на 5. Среди нечетных трехзначных чисел кратны 125 только 125, 375, 625 и 875. Среди соседних с ними чисел делятся на 8 только 376 и 624. Проверка показывает, что первое из этих чисел годится, а второе нет. Получили расшифровку: 376·376 = 141 376.

917. 8, 12, 16, $21\frac{1}{3}$. **918.** 1. **919.** 1. **920.** 2. **921.** 0,5. **922.** 0,5.
923. $\frac{5}{6}$. **924.** 11. **925.** 1. **926.** $1\frac{2}{3}$. **927.** 9. **928.** 1.

930. За 1 ч минутная стрелка проходит полный циферблат. Часовая убегает на 5 делений вперед. За $\frac{1}{12}$ ч минутная проходит эти 5 делений, а часовая убегает на $\frac{5}{12}$ деления. За $\frac{1}{144}$ ч минутная стрелка проходит и это расстояние и т. д. Значит, задача свелась к нахождению суммы $S = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{12^4} + \frac{1}{12^5} +$ Для этого, как мы уже делали, рассмотрим $12S = 12 + 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{12^4} + \frac{1}{12^5} + \ldots = 12 + S$, откуда $12S = 12 + S$, т. е. $S = \frac{12}{11}$.

932. а) Левая часть делится на 2, а правая не делится. Решений в целых числах нет. б) Перепишем уравнение в виде $69x - 69y - 22y = 1996$. Обозначив $z = x - y$, получим $69z - 22y = 1996$. Обозначив $t = 3z - y$, придем к уравнению $3z + 22t = 1996$. Его решение легко угадать: $t = 1$, $z = \frac{1996-22}{3} = 658$. После этого легко вернуться к искомым неизвестным: $y = 3z - t = 3 \cdot 658 - 1 = 1973$, $x = z + y = 1973 + 658 = 2631$. **937.** Уравновесим на весах груз более тяжелый, чем тело, которое нужно взвесить. Затем на чашку с гирями положим взвешиваемое тело и снимем несколько гирь, чтобы восстановить равновесие. Вес снятых гирь равен весу тела.

938. Положим на чашки весов по одной детали. Если весы останутся в равновесии, то на чашках лежали хорошие детали. (Если весы не в равновесии, то хорошие — две оставшиеся; решение при этом аналогично.) Заменим одну из них одной из оставшихся. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая деталь — четвертая (только в этом случае мы не будем знать, легче она остальных или тяжелее). Если же одна из чашек опустится, то фальшивая — та деталь, которую только что положили на чашку.

941. Эту задачу удобно решать, применяя двоичную систему счисления. Любое число от 1 до 1023 может быть представлено в двоичной системе счисления как десятизначное число (возможно, начинающееся цифрой 0). Например: $1023 = 1\,111\,111\,111_2$,
$1000 = 1\,111\,101\,000_2$,
$513 = 1\,000\,000\,001_2$,
$32 = 0\,000\,100\,000_2$ и т. п.

Заметим теперь, что для выяснения любой цифры двоичной записи числа достаточно задать один вопрос. Например, для выяснения первой цифры достаточно спросить: «Число меньше чем 512?» Так за 10 вопросов можно узнать все цифры двоичной записи числа, т. е. само число. Меньшего количества вопросов недостаточно, так как для девяти вопросов комбинаций ответов (типа «да» — «нет») имеется $2^9 = 512$, что не позволяет распознать 1000 чисел.

942. а) Здесь деление не пополам, а на три по возможности равные части; б) 4 взвешивания. Первое взвешивание: кладем на чашки по 27 монет. В случае равновесия фальшивая — среди оставшихся 26 монет. Если же одна чашка легче, то фальшивая — среди лежащих на ней. Второе взвешивание: кладем на обе чашки по 9 монет из числа «подозреваемых» и т. д. В общем случае для n монет искомое число взвешиваний k определяется из неравенств $3^{k-1}<n\leq 3^k$. Кажется очевидным, что k есть минимальное число взвешиваний, т. е. что при любом способе взвешиваний ситуация может сложиться так, что после $k-1$ взвешиваний фальшивая монета не будет выделена.

Доказательство можно провести следующим образом. При каждом взвешивании монеты распадаются на три группы: монеты, попавшие на левую чашку, монеты, попавшие на правую чашку, и, наконец, монеты, не попавшие ни на какую чашку. Если на чашки весов было положено разное число монет, то в случае, когда перетянула чашка, где монет больше, фальшивая монета может оказаться в любой из этих трех групп и такое взвешивание вообще не даст нам никаких сведений. Если же на чашках было поровну монет, то либо весы уравновесятся (это значит, что фальшивая монета не попала на весы), либо одна из чашек перетянет (фальшивая монета — на более легкой чашке).

Пусть после каждого взвешивания фальшивая монета каждый раз оказывается в той группе, которая содержит наибольшее число монет. Тогда при каждом взвешивании число «подозреваемых» монет убывает не более чем в три раза, так что после $k-1$ взвешиваний останется не менее чем $\frac{n}{3^{k-1}}>1$ «подозреваемых» монет.

943. Обозначим красные гири через $К_1$ и $К_2$, желтые — $Ж_1$ и $Ж_2$, а зеленые — $З_1$ и $З_2$. Сначала положим на левую чашку весов гири $К_1$ и $Ж_1$, а на правую — $К_2$ и $З_1$. Рассмотрим два случая:

1) Весы в равновесии. Поскольку из гирь $К_1$ и $К_2$ одна легкая, а другая тяжелая, то есть две возможности: либо гири $К_1$ и $З_1$ легкие, а гири $Ж_1$ и $К_2$ тяжелые, либо наоборот. Вторым взвешиванием сравниваем красные гири.

2) Весы не в равновесии. Пусть для определенности перевесила левая чашка. Тогда обязательно $К_1$ тяжелая, а $К_2$ легкая. Если бы гиря $Ж_1$ была легкая, а $З_1$ тяжелая, то весы были бы в равновесии. Значит, есть три возможности: $Ж_1$ и $З_1$ обе легкие; $Ж_1$ тяжелая, а $З_1$ легкая; наконец, обе гири $Ж_1$ и $З_1$ тяжелые. Различить эти три случая очень просто: достаточно на левую чашку весов положить $К_1$ и $К_2$, а на правую — $Ж_1$ и $З_1$.

945. а) Если распилить третье звено, то цепочка распадется на три части: 1, 2 и 4 звена. б) Решим задачу в общем случае (n дней и n звеньев). Заметим сначала, что если у путешественника имеется цепочка из $n=(k+1)2^{k+1}-1$ звеньев, то он может распилить k звеньев так, чтобы получились куски, состоящие соответственно из $(k+1)$, $2(k+1)$, $2^2(k+1)$, $2^k(k+1)$ звеньев.

Располагая этими кусками и k распиленными звеньями, путешественник может расплачиваться с хозяином в течение n дней. Если число n звеньев цепочки не представляется в виде $n=(k+1)2^{k+1}-1$, то надо рассмотреть наименьшее целое число k, такое, что $n<(k+1)2^{k+1}-1$. В частности, если $n=100$, то достаточно распилить $k=4$ звена. (Какие?)

946. Занумеруем мешки числами от 0 до 9. Возьмем из каждого мешка столько монет, каков его номер. Если бы все монеты были настоящие, они весили бы $10+20+...+90=450$ г. Избыток веса совпадает с номером мешка, где лежат фальшивые монеты.

947. С помощью трех взвешиваний расположим по весу три пакета (взвешивая каждую пару), потом положим на одну чашку весов оставшийся (четвертый) пакет, а на другую — тот из трех, который имеет средний вес. Пятым взвешиванием сравним вес четвертого пакета либо с самым тяжелым, либо с самым легким из трех.

948. Занумеруем монеты числами от 1 до 12. Сначала положим на левую чашку весов монеты 1, 2, 3, 4, а на правую — 5, 6, 7 и 8. Рассмотрим два случая:

1) Весы в равновесии. Значит, фальшивая среди оставшихся (с 9 по 12) монет. Этот случай довольно прост. Сравниваем монеты 9 и 10 с 1 и 2:

если их вес одинаков, то фальшивая монета 11 или 12 (за одно взвешивание она находится);

если нет, то фальшивая — 9 или 10 (причем известно даже, легче она или тяжелее настоящей).

2) Левая чашка легче. Фальшивая среди взвешиваемых. Положим на левую чашку монеты 9, 10, 11 и 4, а на правую — 1, 2, 3 и 8. Разберем все три случая:

левая чашка по-прежнему легче, тогда фальшивая одна из двух монет: 4 или 8 (для ее обнаружения достаточно одного взвешивания);

весы уравновесились, значит, фальшивая одна из монет: 5, 6, 7, причем она тяжелее настоящей (остальное понятно);

легче стала правая чашка, значит, фальшивая одна из монет: 1, 2, 3 — и она легче.

Третий случай (когда при первом взвешивании перевесила левая чашка) по сути ничем не отличается от второго.

949. Эксперт может:

1) положить на левую чашку 1-ю монету, на правую — 8-ю. Правая чашка перевесит, суд увидит, что 1-я монета фальшивая, а 8-я настоящая;

2) положить на правую чашку 2, 3 и 8-ю монеты, на левую — 9, 10 и 1-ю. Левая чашка перевесит. Суд убедится, что 2-я и 3-я монеты фальшивые, а 9-я и 10-я настоящие;

3) положить на левую чашку 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10-ю монеты, а на правую — остальные. Правая чашка перевесит. Значит, на левой чашке фальшивых монет больше, чем на правой, т. е. 4, 5, 6 и 7-я монеты фальшивые, а 11, 12, 13 и 14-я настоящие.

Точно так же проверка 2^k-1 фальшивых и 2^k-1 настоящих монет может быть осуществлена за k взвешиваний при любом $k>1$.

950. Достаточно проверить два соотношения $x_1+x_2+x_3=x_6$, $x_1+x_6<x_3+x_5$, каждое из которых необходимо для правильности надписей, где через x_k обозначена масса гирьки с надписью «k граммов».

951. а) Разобьем отрезок на 12 равных частей. Сверху нарисуем дуги, разбивающие его на 3 равные доли, а снизу — на 4. В результате отрезок разделился на кусочки длиной 3, 1, 2, 2, 1 и 3. Следовательно, пирог достаточно разрезать на шесть частей: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{4}$.

Если же пирог разрезан на 5 частей, то при разделе «на троих» кому-то достанется лишь одна часть. Она будет составлять $\frac{1}{3}$ пирога, что не позволит разделить его на четверых. б) Пусть площадь квартиры равна 12. Ясно, что шесть комнат, площади которых равны 3, 3, 2, 2, 1 и 1, удовлетворяют условию задачи. Пяти комнат недостаточно. В самом деле, при расселении трех семей в пяти комнатах хотя бы одна семья получит только одну комнату, и площадь ее должна быть 4. При размещении четырех семей та семья, которой достанется эта комната, получит слишком большую площадь.

953. 30 км/ч и 40 км/ч. **954.** 120 км. **955.** 20 км/ч и 40 км/ч.

956. 1,5 мин. Примем длину эскалатора за 1, а время будем измерять в минутах. Пусть u — скорость движения эскалатора, v — скорость человека, спускающегося по неподвижной лестнице (таким образом, скорость мы измеряем в частях эскалатора, проходимых за минуту). Когда человек спускается по движущемуся эскалатору, его скорость равна $v+u$, а время спуска $1:(u+v)=1$ (по условию). Аналогично когда человек идет вдвое быстрее, $1:(2v+u)=\frac{3}{4}$. Решая систему

$$\begin{cases} u+v=1, \\ 2v+u=\frac{4}{3}, \end{cases}$$

находим u; искомое время, очевидно, равно $\frac{1}{u}$.

957. За 45 мин. Пусть велосипедист проедет от A до B за x ч, а автомобиль — за y ч. Когда автомобиль на половине пути догнал велосипедиста, велосипедист двигался в течение $\frac{x}{2}$ ч, а автомобиль — в течение $\frac{y}{2}$ ч. Поскольку автомобиль выехал на $\frac{1}{4}$ ч позже, имеем $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}+\frac{1}{4}$. Когда автомобиль проехал весь путь AB, т. е. ехал y ч, велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, т. е. ехал $\frac{2x}{3}$ ч. Поскольку автомобиль выехал на $\frac{1}{4}$ ч позже, получаем $\frac{2x}{3}=y+\frac{1}{4}$. Итак, у нас получились два уравнения с двумя неизвестными.

958. Половину пути надо идти пешком, половину — ехать. Если t — время от начала движения до отхода поезда, то $\frac{t}{2}+\frac{t}{2}:3+10=$ $=t-10$, откуда $t=60$ мин. **959.** 18 км/ч. **960.** $\frac{5}{6}$ км/ч. **961.** 25 км/ч. **962.** 32 км/ч. **963.** 182 км. **964.** 4 ч. **965.** 6 ч. **966.** 6 км/ч, 9 км/ч, 12 км/ч, 42 км. **967.** 20 км/ч, 40 км/ч. **968.** 20 ч, 25 ч. **969.** 180 т. **969.** 159 журналов. **970.** 6000 р. **971.** В 1,5 раза.

972. Мухи не перегоняют одна другую. Значит, никакая муха не может обгонять никакую другую более чем на один оборот. Поэтому количества оборотов, сделанных мухами, не могут отличаться более чем на единицу. Часовая стрелка делает за 12 ч один оборот, минутная — 12, секундная —

720; три мухи вместе сделают $1+12+720=733$ оборота. Осталось представить число 733 в виде суммы трех натуральных чисел, отличающихся не более чем на единицу: $733=244+244+245$. Это и есть ответ: мухи, начавшие свой путь на часовой и минутной стрелках, сделали по 244 оборота, а третья муха — 245. **975.** 170 кг. **976.** 4 : 3. **977.** 2,1 кг.

978. За 365 дней. Если обозначить через v объем воды в озере, через w — объем воды, поступающей за сутки из родников, а через z — объем воды, выпиваемой в сутки одним слоном, то условия задачи можно записать в виде системы двух уравнений: $v+w=183z$, $v+5w=5\cdot 37z$. Вычитая из второго уравнения первое, получим, что $4w=2z$, значит, $v=365w$. Пусть один слон выпивает озеро за x дней, тогда $v+xw=xz$. Подставляя $z=2w$, получаем $v=xw$. Но мы уже знаем, что $v=365w$, поэтому слон осушит озеро за 365 дней, после чего понадобится еще два года, чтобы озеро вновь наполнилось из родников.

979. Обозначим всю траву на лугу через 1, поедаемую одной коровой за день через x, а вырастающую за день на лугу через y:

$$\begin{cases} 24\cdot 70x=1+24y, \\ 60\cdot 30x=1+60y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=70x-\frac{1}{24}, \\ 1800x=1+60\cdot\left(70x-\frac{1}{24}\right) \Rightarrow 1800x=1+4200x-\frac{5}{2}, \end{cases}$$

откуда $x=\frac{1}{1600}$, $y=\frac{7}{160}-\frac{1}{24}=\frac{1}{480}$.

Если n коров съедят траву за 96 дней, то $n\cdot 96x=1+96y$, т. е.

$$n=\left(1+\frac{96}{480}\right)\cdot\frac{1600}{96}=20.$$

982. Пусть на неподвижном эскалаторе x ступенек. Будем измерять скорости в «ступеньках в минуту». Пусть $э$ — скорость эскалатора, v — скорость Миши. Тогда Миша спустится за $\frac{x}{э+v}$ мин и наступит на $\frac{x}{э+v}\cdot v$ ступенек. Аналогично Боря наступит на $\frac{x}{э+3v}\cdot 3v$ ступенек.

$$\begin{cases} \frac{x}{э+v}\cdot v=50, \\ \frac{x}{э+3v}\cdot 3v=75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=50+50k, \\ x=25+75k, \end{cases} \quad \text{где } k=\frac{э}{v}.$$

Из этой системы и находим $x=100$.

983. а) Река с одинаковой скоростью несет и пловца, и мяч. Поскольку пловец 20 мин удаляется от мяча (за счет собственной скорости), он будет догонять его тоже 20 мин[1]. Итак, расстояние между мостами, равное 2 км, мяч плывет (со скоростью течения реки) 40 мин, следовательно, скорость реки $2:\frac{2}{3}=3$ км/ч.

984. На 2 км. Перейдем в систему отсчета, связанную с пешеходом. Расстояния и время при этом не изменятся, зато пешехода можно будет считать неподвижным — можно даже заменить пешехода на фонарный столб. Задачу можно переформулировать так:

---

[1] Это легче понять, вообразив себя на плоту, спускающемся по течению. В такой системе отсчета мяч и вода реки неподвижны.

Велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда велосипедист проезжал мимо фонарного столба, мотоциклист отставал от него на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, они были на расстоянии 3 км от фонарного столба. На каком расстоянии от фонарного столба был велосипедист в тот момент, когда мотоциклист поравнялся с фонарным столбом?

Эту задачу уже легко решить вообще без уравнений (подумайте, во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста).

985. Два встречных эскалатора образуют движущееся с постоянной скоростью u кольцо, относительно которого шапка неподвижна, а соперники бегут с одинаковыми скоростями v. Каждый должен пробежать полкольца, поэтому шапку схватят одновременно. Если $v<2u$, то шапка успеет соскользнуть с эскалатора и первым к ней подбежит Хитрец.

986. Представьте сначала, что пловцы плывут в одну сторону по одной дорожке, а возвращаются по другой. Затем вообразите, что они плавают по кругу (как бы отделив дорожки одну от другой канатом). Тогда первый проплывет весь круг за 22 мин, а второй — за 1 ч. Через 11 ч впервые оба пловца окажутся одновременно в исходной точке. К этому моменту первый сделает 30, а второй — 11 оборотов. Значит, первый проплывет на $30-11=19$ кругов больше, так что обгонов будет 18. (Чтобы понять, почему не 19, представьте себе, что один проплыл два круга в то время, за которое второй проплыл один. Обгонов вообще не будет!)

987. Пусть v — скорость течения. Тогда скорость ходьбы — $\frac{3}{2}v$, а скорость бега — $3v$. Искомое время состоит из времени t, которое рассеянный бежал назад, и времени, которое он потратил, чтобы пройти пешком то расстояние, которое пробежал. Поскольку бежал он вдвое быстрее, чем шел, искомое время есть $t+2t=3t$. Рассмотрим ситуацию с момента, когда рассеянный бросил палку, до того момента, когда он встретил ее, плывущую по ручью. Он пробежал расстояние $t\cdot 3v$, затем за 10 мин прошел расстояние $10\cdot\frac{3}{2}v$. Палка плыла все это время, т. е. $(t+10)$ мин, со скоростью v. Очевидно, $t\cdot 3v=10\cdot\frac{3}{2}v+(t+10)\cdot v$. Сократив на v, находим $t=12{,}5$ мин, а $3t=37{,}5$ мин.

993. Пусть $a<b<c<d<e$ — искомые числа. Сложив все 10 сумм, получим 72. Так как каждое из пяти исходных чисел входит в четыре суммы, сумма исходных чисел равна $a+b+c+d+e=72:4=18$. Сумма $a+b$ наименьших двух, очевидно, равна 0, а наибольших $d+e=15$. Значит, $c=18-0-15=3$. В ряду сумм второе место занято, очевидно, суммой первого и третьего. Поэтому $a+c=2$, т. е. $a=2-3=-1$. Следовательно, $b=1$. Аналогично находим, что наибольшие два числа равны 5 и 10.

998. $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{0}{7}$ л. Проверить, что указанные числа служат ответом, не составляет труда: после разливания молока первым гномом (по $\frac{1}{7}$ каждому из остальных) получается точно то же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма $\frac{1+2+\ldots+6}{7}$ равна как раз 3.

Нужно еще доказать, что других ответов нет. Пусть x — наибольшее количество молока, оказавшееся за все время переливаний у какого-либо гнома Г, когда пришла его очередь разливать. Тогда после очередного цикла из 7 разливаний (их можно неограниченно продолжать, так что гнома Г можно считать первым в цикле) у Г накопится не более чем $6\cdot\frac{x}{6}=x$ л, причем равенство возможно, лишь если каждый из 6 других гномов наливает Г ровно по $\frac{x}{6}$ л. Таким образом, каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке $\frac{kx}{6}$ л ($k=1, 2, \ldots, 6$). Значение x находится из условия, что всего молока 3 л.

Есть и другое решение. Пусть первый гном разливает каждому по x л молока, так что изначально у него $6x$, а второй — по y (т. е. у второго, когда подошла его очередь разливать, оказывается $6y$ л молока). Тогда изначально разность количества молока у первого и второго равна $6x-(6y-x)=7x-6y$; после второго разлива разность станет равна y и не изменится вплоть до следующего хода первого. Отсюда $7x-6y=y$, т. е. $x=y$. Так же можно доказать, что не только первый и второй, но и вообще все гномы разливают одно и то же количество молока. Дальше все просто.

1001. Занумеруем окопы слева направо числами от 1 до 1000. Предположим сначала, что в момент первого выстрела пехотинец сидит в окопе с четным номером. Выстрелим во второй окоп. Если не попали, то пехотинец перешел в окоп с нечетным номером. Выстрелим в третий окоп. Если не попали, то пехотинец перешел в окоп с четным номером, не меньшим 4. Выстрелим в четвертый окоп и т. д. Оттесняя пехотинца, мы получим, что после выстрела в 998-й окоп он будет находиться в 999-м окопе, и поразим его.

Если в течение первого этапа цель не поражена, то вначале пехотинец находился в окопе с нечетным номером и после первых 998 выстрелов опять оказался в окопе с нечетным номером. Теперь стреляем в окопы в обратном порядке и поражаем цель.

Итак, выстрелив сначала в окопы 2, 3, ..., 999, а затем в обратном порядке: 999, ..., 3, 2, мы за 1996 выстрелов поразим цель. (Можно доказать, что меньшим числом выстрелов обойтись нельзя.)

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Как решать задачи? 3

АРИФМЕТИКА И НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ 5

1. «Метод Прокруста» 5
2. Переправы 6
3. Сбежали цифры 7
4. Нехватки и избытки 9
5. Чем отличается овца от курицы? 9
6. Шутки 10
7. Сколько надо взять? 11
8. Перекладывания спичек 12
9. Принцип Дирихле 14
10. Разность некоторых двух из $n+1$ целых чисел кратна n 15
11. Всякая палка о двух концах 16
12. Двенадцать стульев 17
13. Устный счет 18
14. Разрезания 19
15. Обратный ход 21
16. Положите три спички 22
17. Расстановка скобок и знаков 23
18. Один сапфир и два топаза... 24
19. Наибольшее число, все цифры которого... 26
20. При составлении расписания... 26
21. Книга стоит рубль и половину своей стоимости 27
22. Логические задачи 28
23. ...цифра десятков больше цифры единиц? 30
24. Сколько страниц в книге? 30
25. Встретились три охотника... 31
26. Поставьте знаки сложения... 31
27. Дроби 31
28. Ряды Фарея 33
29. Полпути вдвое медленнее — потратим то же время 36
30. Дурацкие вопросы 36

31. Вычисления 38
32. Переливания 41
33. Прямоугольник из квадратов 42
34. Остров рыцарей и лжецов 43
35. Составление уравнений 45
36. Повороты 48
37. Проценты 49
38. Перебор 51
39. Лингвистические задачи 53
40. Возрасты 54
41. Гонки 57
42. «Совместная трапеза» 60
43. Полдня артель косила большой луг 62
44. Развертки многогранников 63
45. Четность 68
46. Чередование 72
47. Разбиение на пары 74
48. Раскраски 75
49. Эйлеровы пути 77
50. Инварианты 78
51. Подсчет двумя способами 79
52. Сумма и среднее арифметическое 81
53. Средняя скорость 85
54. Включения — исключения 86
55. Замостите плоскость! 88
56. Последняя цифра 89
57. Остатки 90
58. Периодичность остатков 92
59. Арифметические прогрессии 92
60. Примеры и конструкции 94
61. Сложим первое с последним, второе с предпоследним, 97
62. В жаркий летний день... 100
63. Индукция 102
64. Обходы 104
65. Деревья 104
66. В спортклубе тренируются 100 толстяков. 108
67. Быстрое возведение в квадрат 109
68. Умножение столбиком 110
69. Что такое граф? 112
70. Турниры 115
71. Разложение на множители 116
72. Комбинаторика 117
73. Количество делителей 120
74. Игры 121
75. Выигрышные и проигрышные позиции 122

76. Симметрия 124
77. Десятичная система счисления 125
78. К трехзначному числу приписали его же 127
79. Системы счисления 128
80. Двоичная система счисления 131
81. Делимость 133
82. Признаки делимости 135
83. Признак делимости на 9 136
84. Признак делимости на 11 137
85. Ночью один моряк проснулся... 139
86. Китайская теорема об остатках 139
87. Неравенства 142
88. Ребусы 143
89. Геометрические прогрессии 145
90. Сумма степеней двойки 147
91. Периодические дроби 149
92. Ахиллес и черепаха 152
93. Уравнения первой степени 153
94. Взвешивания 153
95. Текстовые задачи 155
96. Смеси и сплавы 157
97. На дне озера бьют ключи... 158
98. Относительное движение 158
99. И вновь — неравенства 159
100. Каемка 161

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ 162

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
С72

Спивак А. В.
С72 Тысяча и одна задача по математике: Кн. для учащихся 5—7 кл./А. В. Спивак.— М. : Просвещение, 2002. — 207 с. : ил.— ISBN 5-09-010062-4.

В книге широко представлены задачи по математике, предлагавшиеся на занятиях математических кружков и олимпиадах. Основное ее содержание — классические, проверенные временем арифметические задачи, которые учат правильно рассуждать и считать. Кроме них, есть геометрические задачи, требующие фантазии и изобретательности, и просто забавные шутки.

Книга будет интересна и полезна как более старшим, так и более младшим школьникам, а также учителям и родителям.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 5-09-010062-4

Учебное издание

Сивак Александр Васильевич

ТЫСЯЧА И ОДНА ЗАДАЧА ПО МАТЕМАТИКЕ

Книга для учащихся 5—7 классов

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художник *С. И. Кравцова*
Художественные редакторы *Т. В. Морозова, А. В. Крикунов*
Компьютерная графика *И. А. Шалеев*
Технические редакторы *Г. В. Субочева, Н. А. Киселева, С. Н. Терехова*
Корректоры *Н. В. Бурдина, Н. Д. Цухай*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Сдано в набор 05.06.01. Подписано к печати 06.08.02. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,21. Усл. кр.-отт 31,0. Уч.-изд. л. 12,52. Тираж 10 000 экз. Заказ № 579.

Федеральное Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Интересных задач много. Они есть в учебниках, в сборниках занимательных и олимпиадных задач и не подвержены влиянию моды или очередной реформы. Их авторы — Евклид, Архимед, Эйлер, сотни других математиков и педагогов.

Интеллектуальное развитие любого человека требует классических, проверенных поколениями задач. Они собраны в этой книге. Большинство задач взято из журнала "КВАНТ" и материалов различных олимпиад.

Параллельно с работой над этой книгой я вёл математический кружок при МГУ (так называемый малый мехмат), что помогло мне в подборе и систематизации задач.

А. Спивак

ISBN 5-09-010062-4

9 785090 100625

·Просвещение·